

# 2019~2020 年度河南省高三阶段性考试(三)

## 数学参考答案(理科)

1. D 【解析】本题考查集合交集与补集的混合运算, 考查运算求解能力.

因为  $A=\{1, 2, 3, 4\}$ ,  $B=\{3, 4, 5\}$ , 所以  $\complement_U A=\{0, 5, 6\}$ ,  $(\complement_U A) \cap B=\{5\}$ .

2. A 【解析】本题考查复数的四则运算和概念, 考查运算求解能力.

$$z = \frac{2i^3}{1+i} = \frac{-2i}{1+i} = \frac{-2-2i}{2} = -1-i.$$

3. C 【解析】本题考查等比数列的通项公式, 考查运算求解能力.

由  $S_{n+1}=a_1+qS_n$ , 得  $S_7-2S_6=a_1=1$ , 所以  $a_5=2^4=16$ , 所以  $a_1+a_5=17$ .

4. B 【解析】本题考查平面向量的坐标运算, 考查运算求解能力.

因为  $2m+n=(3\lambda+4, 4)$ ,  $m-2n=(-\lambda-3, -3)$ , 且  $(2m+n) \parallel (m-2n)$ ,  
所以  $(-3) \cdot (3\lambda+4) - 4 \cdot (-\lambda-3) = 0$ ,  $\lambda=0$ .

5. C 【解析】本题考查三角函数的二倍角公式, 考查运算求解能力.

由  $\sin 2\alpha=\cos \alpha$ , 则  $2\sin \alpha \cos \alpha=\cos \alpha$ , 因为  $\alpha \neq \frac{k\pi}{2}$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ , 故  $\sin \alpha=\frac{1}{2}$ , 所以  $\cos 2\alpha=1-2\sin^2 \alpha=\frac{1}{2}$ .

6. A 【解析】本题考查充分条件、必要条件和三角函数, 考查数形结合和运算求解能力.

必要性: 设  $f(x)=\sin x+1$ , 当  $a>0$  时,  $f(x) \in [1-a, 1+a]$ , 所以  $1-a<0$ , 即  $a>1$ ;

当  $a<0$  时,  $f(x) \in [1+a, 1-a]$ , 所以  $1+a<0$ , 即  $a<-1$ . 故  $a>1$  或  $a<-1$ .

充分性: 取  $x_0=\frac{\pi}{2}$ , 当  $a<-1$  时,  $\sin x_0+1<0$  成立.

7. D 【解析】本题考查三角函数的图象、性质以及平移变换, 考查运算求解能力.

由函数  $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)+1$  ( $\omega>0$ ,  $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$ ) 的部分图象知  $1+\sin \varphi=\frac{3}{2}$ , 即  $\sin \varphi=\frac{1}{2}$ . 因为  $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$ , 所以  $\varphi=\frac{\pi}{6}$ , 所以  $f(x)=\sin(\omega x+\frac{\pi}{6})+1$ . 因为点  $(\frac{\pi}{6}, 2)$  在  $f(x)$  的图象上, 所以  $\sin(\frac{\pi}{6}\omega+\frac{\pi}{6})=1$ , 所以  $\frac{\pi}{6}\omega+\frac{\pi}{6}=2k\pi+\frac{\pi}{2}$  ( $k \in \mathbf{Z}$ ). 因为  $\omega>0$ , 结合图象可知,  $\omega=2$ , 所以  $f(x)=\sin(2x+\frac{\pi}{6})+1$ , 将  $f(x)$  的图象向右平移  $\frac{\pi}{4}$  个单位长度后得到函数  $g(x)$  的图象, 则  $g(x)=\sin[2(x-\frac{\pi}{4})+\frac{\pi}{6}]+1=\sin(2x-\frac{\pi}{3})+1$ .

8. B 【解析】本题考查函数的奇偶性与零点, 考查数形结合的数学思想以及推理论证能力.

因为函数  $f(x)=x^{2019}+a-1-3\sin x$  是  $\mathbf{R}$  上的奇函数,

所以  $f(0)=a-1=0$ , 即  $a=1$ , 所以  $f(x)=x^{2019}-3\sin x$ , 结合函数  $y=x^{2019}$  与  $y=3\sin x$  的图象可知,  $f(x)$  的零点的个数为 3.

9. B 【解析】本题考查基本不等式的性质、一元二次不等式的解法, 考查推理能力与计算能力.

$\because a, b \in (0, +\infty)$ ,  $\therefore (\frac{a+b}{2})^2 \geq ab$ , 可得  $\frac{1}{ab} \geq \frac{4}{(a+b)^2}$ , 当且仅当  $a=b=\frac{1}{2}$  或  $a=b=4$  时取等号.

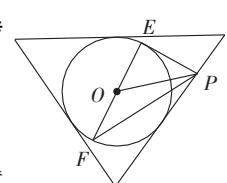
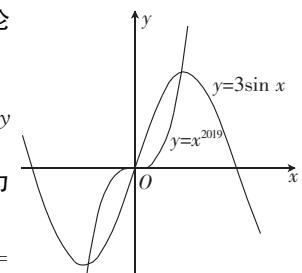
$\therefore 1+\frac{2}{ab}=\frac{9}{a+b}$ ,  $\therefore \frac{2}{ab}=\frac{9}{a+b}-1 \geq \frac{8}{(a+b)^2}$ , 化为  $(a+b)^2-9(a+b)+8 \leq 0$ , 解得  $1 \leq a+b \leq 8$ , 则  $a+b$  的取值范围是  $[1, 8]$ .

10. D 【解析】本题考查平面向量的数量积公式以及三角形内切圆的应用, 考查化归与转化的数学思想以及运算求解能力.

正  $\triangle ABC$  的边长为 1, 则高为  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ , 内切圆半径为  $\frac{\sqrt{3}}{6}$ , 如图所示,  $\overrightarrow{PE} \cdot \overrightarrow{PF}=(\overrightarrow{OE}-\overrightarrow{OP}) \cdot$

$(\overrightarrow{OF}-\overrightarrow{OP})=|\overrightarrow{OP}|^2-|\overrightarrow{OE}|^2=|\overrightarrow{OP}|^2-\frac{1}{12}$ , 当点  $P$  为  $\triangle ABC$  的顶点时,  $|\overrightarrow{OP}|^2$  取得最大值  $\frac{1}{3}$ , 所以  $\overrightarrow{PE} \cdot \overrightarrow{PF}$  的最大值为  $\frac{1}{4}$ .

11. B 【解析】本题考查指数与对数的转换以及函数与方程的数学思想, 考查抽象概况能力.



由  $6^x > 5^x$ , 解得  $x > 0$ , 令  $t = \log_5(4^x + 5^x) = \log_4(6^x - 5^x)$ , 所以  $\begin{cases} 4^x + 5^x = 6^t \\ 6^x - 5^x = 4^t \end{cases}$ , 两式相加得  $4^x + 6^x = 4^t + 6^t$ , 又

函数  $y = 4^x + 6^x$  单调递增, 故  $x = t$ , 则  $4^x + 5^x = 6^x$ , 即  $(\frac{2}{3})^x + (\frac{5}{6})^x = 1$ . 令  $g(x) = (\frac{2}{3})^x + (\frac{5}{6})^x$ , 且  $g(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递减, 又  $g(2) > 1, g(3) < 1$ , 所以存在唯一  $x_0 \in (2, 3)$ , 使得  $g(x_0) = 1$ . 所以方程  $\log_5(4^x + 5^x) = \log_4(6^x - 5^x)$  只有唯一实数解.

12. C 【解析】本题考查等差数列的定义以及前  $n$  项和, 考查运算求解能力, 分类讨论的数学思想.

由题意知  $a_{2k} = a_{2k-1} + 1, a_{2k+1} = 2a_{2k} + 1$ , 所以  $a_{2k} = a_{2k-1} + 1, a_{2k+1} = 2(a_{2k-1} + 1) + 1 = 2a_{2k-1} + 3$ , 即  $a_{2k+1} + 3 = 2(a_{2k-1} + 3)$ . 又  $a_1 + 3 = 4$ , 所以数列  $\{a_{2k-1} + 3\}$  是以 4 为首项, 2 为公比的等比数列, 所以  $a_{2k-1} = 4 \cdot 2^{k-1} - 3, a_{2k} = 4 \cdot 2^{k-1} - 2$ ,

$$\text{所以 } S_{\text{奇}} = a_1 + a_3 + \dots + a_{2k-1} = \frac{4(1-2^k)}{1-2} - 3k = 2^{k+2} - 4 - 3k,$$

$$S_{\text{偶}} = a_2 + a_4 + \dots + a_{2k} = 2^{k+2} - 4 - 2k, \text{ 所以 } S_{2k} = S_{\text{奇}} + S_{\text{偶}} = 2^{k+3} - 8 - 5k.$$

当  $k = 8$  时,  $S_{16} = 2000 < 2020$ . 又  $a_{17} = 1021$ , 所以  $S_{17} = 3021 > 2020$ , 故正整数  $m$  的最小值为 17.

13. 10 【解析】本题考查线性规划问题, 考查数形结合的数学思想以及运算求解能力.

画出可行域(图略)知, 当  $l: x + 3y = 0$  平移到过点  $(\frac{5}{2}, \frac{5}{2})$  时,  $z_{\max} = 10$ .

14. -1 【解析】本题考查三角恒等变换的知识, 考查运算求解能力.

因为  $\alpha$  为第二象限角, 所以  $\sin \alpha > 0, \cos \alpha < 0$ ,

$$\text{所以 } \cos \alpha \sqrt{\frac{1+\sin \alpha}{1-\sin \alpha}} = \cos \alpha \sqrt{\frac{(1+\sin \alpha)^2}{\cos^2 \alpha}} = \cos \alpha \cdot \frac{1+\sin \alpha}{|\cos \alpha|} = -1 - \sin \alpha,$$

$$\sin^2 \alpha \sqrt{1 + \frac{1}{\tan^2 \alpha}} = \sin^2 \alpha \cdot \frac{1}{\sin \alpha} = \sin \alpha, \text{ 所以 } \cos \alpha \sqrt{\frac{1+\sin \alpha}{1-\sin \alpha}} + \sin^2 \alpha \sqrt{1 + \frac{1}{\tan^2 \alpha}} = -1.$$

15.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  【解析】本题考查正弦定理以及三角恒等变换, 考查运算求解能力.

由正弦定理可知,  $\sin B = \sin(A+C) = \sin A \cos C + \sin C \cos A$ , 易得  $c \cos A = c \sin A, A = \frac{\pi}{4}$ . 又  $a, b, c$  成等

$$\text{比数列, 所以 } \frac{b}{c} = \frac{a}{b}, \frac{b \sin B}{c} = \frac{a \sin B}{b} = \sin A = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

16.  $(-\infty, e]$  【解析】本题考查导数的几何意义以及导数的应用, 考查函数与方程、化归与转化的数学思想.

设  $f(x) = e^x$ , 切点为  $(x_0, e^{x_0})$ ,

$$f'(x) = e^x, \text{ 所以 } k = e^{x_0}, b = e^{x_0} - kx_0 = e^{x_0}(1-x_0),$$

$$\text{所以 } k+b = e^{x_0} + e^{x_0}(1-x_0) = e^{x_0}(2-x_0).$$

$$\text{令 } g(x) = e^x(2-x), g'(x) = e^x(2-x) - e^x = e^x(1-x),$$

当  $x \in (-\infty, 1)$  时,  $g'(x) > 0, g(x)$  单调递增; 当  $x \in (1, +\infty)$  时,  $g'(x) < 0, g(x)$  单调递减.

又  $g(1) = e$ , 所以  $k+b$  的取值范围是  $(-\infty, e]$ .

17. 解: (1) 因为  $a_4 + a_5 = 6a_3$ , 所以  $a_1 q^3 + a_1 q^4 = 6a_1 q^2$ , 即  $q^2 + q - 6 = 0$ ,

解得  $q = 2$  或  $q = -3$ (舍去). ..... 2 分

$$\text{所以 } S_5 = \frac{a_1(1-2^5)}{1-2} = 31a_1 = 62, a_1 = 2, ..... 4 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } a_n = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n. ..... 5 \text{ 分}$$

$$(2) \text{ 因为 } b_n = \frac{1}{(\log_2 a_n)(\log_2 a_{n+2})} = \frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right), ..... 6 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } T_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n = \frac{1}{2} \left[ \left( 1 - \frac{1}{3} \right) + \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) + \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \dots + \left( \frac{1}{n-2} - \frac{1}{n} \right) + \left( \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right) + \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right) \right] ..... 8 \text{ 分}$$

$$= \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{3}{2} - \frac{2n+3}{n^2+3n+2} \right) = \frac{3}{4} - \frac{2n+3}{2n^2+6n+4}. ..... 10 \text{ 分}$$

18. 解: (1) 函数  $f(x)$  是  $(-\infty, +\infty)$  上的奇函数. ..... 1 分

证明如下:

任取  $x > 0$ , 则  $-x < 0$ ,

$$\text{所以 } f(-x) = 1 - 4^{-x} = -(4^x - 1) = -f(x); ..... 3 \text{ 分}$$

再任取  $x < 0$ , 则  $-x > 0$ ,

所以  $f(-x)=4^{-x}-1=-(1-4^{-x})=-f(x)$ ;

又当  $x=0$  时,  $-x=0$ ,

所以  $f(-x)=0=-0=-f(x)$ . ..... 5 分

故  $f(x)$  是  $(-\infty, +\infty)$  上的奇函数. ..... 6 分

(2) 当  $x>0$  时,  $f(x)=4^x-1$  是增函数,

所以  $f(x)$  是  $(-\infty, +\infty)$  上的增函数. ..... 7 分

又  $f(-\frac{1}{2})=-1, f(1)=3$ , ..... 9 分

所以  $-\frac{1}{2} < \log_4 x \leq 1$ , 所以  $\frac{1}{2} < x \leq 4$ , ..... 11 分

所以不等式  $-1 < f(\log_4 x) \leq 3$  的解集为  $(\frac{1}{2}, 4]$ . ..... 12 分

19. 解: (1)  $f(x)=\frac{1}{2}[1-\cos(2x-\frac{\pi}{2})]=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sin 2x$ , ..... 1 分

$f(\frac{\alpha}{2})=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sin \alpha=\frac{1}{6}$ , 则  $\sin \alpha=\frac{2}{3}$ , 又  $\alpha \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ , 故  $\cos \alpha=\frac{\sqrt{5}}{3}, \tan \alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}$ . ..... 2 分

$\tan 2\alpha=\frac{2\tan \alpha}{1-\tan^2 \alpha}=4\sqrt{5}$ , ..... 4 分

$\tan(2\alpha+\beta)=\frac{\tan 2\alpha+\tan \beta}{1-\tan 2\alpha \tan \beta}=\frac{5\sqrt{5}}{1-20}=-\frac{5\sqrt{5}}{19}$ . ..... 6 分

(2)  $g(x)=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x$ , ..... 7 分

由题意可知  $|PQ|=|f(t)-g(t)|=|\frac{1}{2}-\sin(2t+\frac{\pi}{3})|$ , ..... 9 分

当  $\sin(2t+\frac{\pi}{3})=-1$  时,  $|PQ|$  取到最大值  $\frac{3}{2}$ . ..... 11 分

当  $|PQ|$  取到最大值时,  $2t+\frac{\pi}{3}=\frac{3\pi}{2}+2k\pi(k \in \mathbf{Z})$ , 又  $t \in [0, \pi]$ , 所以  $t=\frac{7\pi}{12}$ . ..... 12 分

20. 解: (1) 在  $\triangle ABC$  中, 由余弦定理得  $\cos \angle ABC=\frac{AB^2+BC^2-AC^2}{2AB \cdot BC}=-\frac{1}{4}$ ,

所以  $\sin \angle ABC=\frac{\sqrt{15}}{4}$ . ..... 2 分

因为角  $D$  与角  $B$  互补,

所以  $\sin \angle ADC=\sin \angle ABC=\frac{\sqrt{15}}{4}, \cos \angle ADC=-\cos \angle ABC=\frac{1}{4}$ . ..... 3 分

又  $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CD}=\frac{3}{2}$ ,

所以  $|\overrightarrow{AD}| \cdot |\overrightarrow{CD}| \cdot \cos \angle ADC=\frac{3}{2}$ , 即  $|\overrightarrow{AD}| \cdot |\overrightarrow{CD}|=6$ , ..... 5 分

所以  $S_{\triangle ACD}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AD}| \cdot |\overrightarrow{CD}| \cdot \sin \angle ADC=\frac{3\sqrt{15}}{4}$ . ..... 6 分

(2) 在  $\triangle ACD$  中, 由余弦定理得  $AC^2=AD^2+CD^2-2AD \cdot CD \cos \angle ADC$ ,

所以  $AD^2+CD^2=AC^2+2AD \cdot CD \cos \angle ADC=12$ , ..... 8 分

所以  $AD+CD=2\sqrt{6}$ , ..... 10 分

所以  $\triangle ACD$  的周长为  $AD+CD+AC=2\sqrt{6}+3$ . ..... 12 分

21. 解: (1) 由题意知,  $f'(x)=x(x^2+4ax+1)$ , 显然  $x=0$  不是方程  $x^2+4ax+1=0$  的根.

为使  $f(x)$  仅在  $x=0$  处有极值, 必须  $x^2+4ax+1 \geq 0$  恒成立, 即  $\Delta=4(4a^2-1) \leq 0$ ,

解不等式, 得  $-\frac{1}{2} \leq a \leq \frac{1}{2}$ . 这时  $f(0)=1$  是唯一极值, ..... 3 分

因此满足条件的  $a$  的取值范围是  $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ . ..... 5 分

(2) 当  $p$  是真命题时, 记  $g(x)=x^3-ax$ , 则  $g'(x)=3x^2-a$ .

当  $a>1$  时, 要使得  $y=\log_a(x^3-ax)$  是增函数, 则需有  $g'(x) \geq 0$  对  $x \in (-\frac{1}{2}, 0)$  恒成立,

所以  $a \leq 0$ , 与  $a > 1$  矛盾; ..... 7 分

当  $0 < a < 1$  时, 要使得  $y = \log_a(x^3 - ax)$  是增函数, 则需有  $g'(x) \leq 0$  对  $x \in (-\frac{1}{2}, 0)$  恒成立,

所以  $a \geq 3 \cdot (-\frac{1}{2})^2 = \frac{3}{4}$ , 所以  $\frac{3}{4} \leq a < 1$ .

记当  $p$  是真命题时  $a$  的取值集合为  $A$ , 则  $A = \{a | \frac{3}{4} \leq a < 1\}$ ; ..... 9 分

记当  $\neg q$  是真命题时  $a$  的取值集合为  $B$ , 则  $B = \{a | a < -\frac{1}{2} \text{ 或 } a > \frac{1}{2}\}$ . ..... 10 分

因为  $p \vee (\neg q)$  是真命题,

所以  $a$  的取值范围是  $A \cup B = \{a | a < -\frac{1}{2} \text{ 或 } a > \frac{1}{2}\}$ . ..... 12 分

22. 解: (1)  $g(x)$  的定义域为  $(0, \frac{3}{2}) \cup (\frac{3}{2}, +\infty)$ , 且  $g'(x) = \frac{3+2x\ln x}{x(3-2x)^2}$ . ..... 1 分

令  $h(x) = 3+2x\ln x$ , 则  $h'(x) = 2(1+\ln x)$ , ..... 2 分

所以当  $x \in (0, \frac{1}{e})$  时,  $h'(x) < 0$ ,  $h(x)$  是减函数;

当  $x \in (\frac{1}{e}, +\infty)$  时,  $h'(x) > 0$ ,  $h(x)$  是增函数.

所以  $h(x)_{\min} = h(\frac{1}{e}) = 3 - \frac{2}{e} > 0$ , ..... 3 分

所以在  $(0, \frac{3}{2}) \cup (\frac{3}{2}, +\infty)$  上,  $g'(x) > 0$ ,

所以  $g(x)$  在区间  $(0, \frac{3}{2}), (\frac{3}{2}, +\infty)$  上是增函数. ..... 4 分

(2) 由题意知  $f'(x) = 1 + \ln x - a + 2a(x-1) = 1 + \ln x + 2ax - 3a$ .

令  $k(x) = 1 + \ln x + 2ax - 3a$ , 因为  $a > 0$ ,

所以  $k(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递增.

又  $f'(\frac{1}{e}) = k(\frac{1}{e}) = 1 + \ln \frac{1}{e} + (\frac{2}{e} - 3)a = (\frac{2}{e} - 3)a < 0$ ,

$f'(e) = k(e) = 1 + \ln e + (2e - 3)a = 2 + (2e - 3)a > 0$ ,

所以存在实数  $x_0 \in (\frac{1}{e}, e)$ , 使得  $k(x_0) = 0$ . ..... 6 分

在  $(0, x_0)$  上,  $f'(x) < 0$ ,  $f(x)$  是减函数; 在  $(x_0, +\infty)$  上,  $f'(x) > 0$ ,  $f(x)$  是增函数.

所以  $f(x)$  的最小值是  $f(x_0)$ , 其中  $x_0$  满足  $f'(x_0) = 0$ , 即  $1 + \ln x_0 + 2ax_0 - 3a = 0$ ,

所以  $f(x_0) = x_0 \ln x_0 - ax_0 + 1 + a(x_0 - 1)^2 = x_0(3a - 1 - 2ax_0) - ax_0 + 1 + a(x_0 - 1)^2$

$= (1-x_0)(a+ax_0+1)$ . ..... 7 分

① 当  $x_0 = 1$ , 即  $a = 1$  时,  $f(x)$  的最小值为 0, 此时  $f(x)$  有一个零点; ..... 8 分

② 当  $\frac{1}{e} < x_0 < 1$  时,  $f(x_0) > 0$ ,  $f(x)$  没有零点, 此时  $a = \frac{1 + \ln x_0}{3 - 2x_0}$ ,

由  $g(x)$  的单调性, 可得  $0 < a < 1$ ; ..... 10 分

③ 当  $1 < x_0 < e$  时,  $f(x_0) < 0$ ,  $f(x)$  有两个零点.

又  $a > 0$ , 所以  $1 < x_0 < \frac{3}{2}$ ,

由  $g(x)$  的单调性, 可得  $a > 1$ .

综上所述, 当  $0 < a < 1$  时,  $f(x)$  没有零点;

当  $a = 1$  时,  $f(x)$  只有一个零点;

当  $a > 1$  时,  $f(x)$  有 2 个零点. ..... 12 分