洛阳市 2019——2020 学年高中三年级第一次统一考试

数学试卷参考答案（理）

一、选择题 1－5 CBDCB　6－10 BCACB　11－12 CA

二、填空题

13. $\sqrt{19}$　　14. -9　　15. $\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{20}=1$　　16. $\{a \mid a=e^2$ 或 $a\leqslant -\dfrac{1}{2e}\}$

三、解答题

17.（1）由条件和正弦定理得 $4\sqrt{3}S+c^2=2\sqrt{3}ab\sin C+c^2=a^2+b^2$，

即 $2\sqrt{3}ab\sin C=a^2+b^2-c^2$.　　……2 分

将余弦定理 $a^2+b^2-c^2=2ab\cos C$　　……3 分

代入上式得 $\sqrt{3}\sin C=\cos C$，即 $\tan C=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，因为 $C\in(0,\pi)$，所以 $C=\dfrac{\pi}{6}$.

……4 分

将 $c=\sqrt{7}$，$a=4$，$C=\dfrac{\pi}{6}$ 代入 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$，得 $b^2-4\sqrt{3}b+9=0$

结合条件 $b>c$ 得 $b=3\sqrt{3}$.　　……6 分

（2）由正弦定理得 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2$，　　……7 分

所以 $b+c=2(\sin B+\sin C)$

$=2[\sin B+\sin(\pi-B-\dfrac{\pi}{3})]=2[\sin B+\sin(\dfrac{2\pi}{3}-B)]$

$=2(\dfrac{3}{2}\sin B+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos B)=2\sqrt{3}\sin(B+\dfrac{\pi}{6})$.　　……9 分

因为 $A+B+C=\pi$，且 $A=\dfrac{\pi}{3}$ 及锐角三角形得 $B\in(0,\dfrac{\pi}{2})$ 且 $(\dfrac{2\pi}{3}-B)\in(0,$

$\dfrac{\pi}{2})$，所以 $\dfrac{\pi}{6}<B<\dfrac{\pi}{2}$.　　……10 分

所以 $\dfrac{\pi}{3}<B+\dfrac{\pi}{6}<\dfrac{2\pi}{3}$. 即 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}<\sin(B+\dfrac{\pi}{6})\leqslant 1$. 所以 $(b+c)\in(3,2\sqrt{3}]$.

……11 分

所以周长 $a+b+c$ 范围是 $(3+\sqrt{3},3\sqrt{3}]$.　　……12 分

18.（1）证明：在等腰梯形 $ABCD$ 中，$AD\parallel BC$，$AD=AB=1$，$\angle ABC=60^\circ$，

$\therefore\ \angle BAD=\angle CDA=120^\circ$，$\angle ADB=30^\circ$，

$BD=\sqrt{AB^2+AD^2-2AB\cdot AD\cdot\cos 120^\circ}=\sqrt{3}$.　　……2 分

$\therefore\ \angle CDB=90^\circ$

即　$BD \perp CD$. ……3 分

又　∵　平面 $BDEF \perp$ 平面 $ABCD$，平面 $BDEF \cap$ 平面 $ABCD = BD$，$CD \subset$ 平面 $ABCD$，

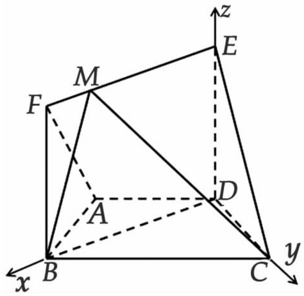
∴　$CD \perp$ 平面 $BDEF$， ……4 分

∵　$CD \subset$ 平面 CDE，

∴ 平面 $CDE \perp$ 平面 $BDEF$. ……5 分

(2) 解：由(1) 知，分别以直线 DB，DC，DE 为 x 轴，y 轴，z 轴建立空间直角坐标系，设 $EM = m(0 \leqslant m \leqslant \sqrt{3})$，则 $B(\sqrt{3},0,0)$，$C(0,1,0)$，$D(0,0,0)$，$M(m,0,\sqrt{3})$，

$\overrightarrow{BC} = (-\sqrt{3},1,0)$，$\overrightarrow{BM} = (m-\sqrt{3},0,\sqrt{3})$，$\overrightarrow{DB} = (\sqrt{3},0,0)$， ……6 分



设平面 BMC 的法向量为 $\vec{n} = (x,y,z)$，

∴　$\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{BM} = 0 \end{cases}$，即 $\begin{cases} -\sqrt{3}x + y = 0 \\ (m-\sqrt{3})x + \sqrt{3}z = 0 \end{cases}$

令 $x = \sqrt{3}$，则 $y = 3$，$z = \sqrt{3} - m$，

∴　平面 BMC 的一个法向量为 $\vec{n} = (\sqrt{3},3,\sqrt{3}-m)$.

……8 分

设 BD 与平面 BCM 所成角为 θ，

∴　$\sin\theta = |\cos < \vec{n},\overrightarrow{BD} >|$

$= \dfrac{|\vec{n} \cdot \overrightarrow{BD}|}{|\vec{n}| \cdot |\overrightarrow{BD}|} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{(m-\sqrt{3})^2 + 12}}$， ……10 分

∴　当 $m = 0$ 时取最小值 $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，当 $m = \sqrt{3}$ 时取最大值 $\dfrac{1}{2}$， ……11 分

故 BD 与平面 BCM 所成角正弦值的取值范围为 $[\dfrac{\sqrt{5}}{5},\dfrac{1}{2}]$. ……12 分

19. 解：(1) 设 AB 方程为 $y = kx + 2(k > 0)$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$x_1 > 0$，

联立方程 $\begin{cases} x^2 = 4y, \\ y = kx + 2. \end{cases}$ 消去 y 得：$x^2 - 4kx - 8 = 0$，$\triangle = 16k^2 + 32 > 0$.

∴　$\begin{cases} x_1x_2 = -8, \\ x_1 + x_2 = 4k. \end{cases}$　　①　 ……2 分

又 $\overrightarrow{AP} = (-x_1, 2-y_1)$，$\overrightarrow{PB} = (x_2, y_2-2)$

由 $\overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{PB}$ 得：$x_1 = -2x_2$ ……4 分

代入 ① 解得 $k = \dfrac{1}{2}$， ……5 分

∴　直线 AB 的方程为：$y = \dfrac{1}{2}x + 2$，即 $x - 2y + 4 = 0$. ……6 分

(2) 由(1) 得 $A_1(x_1,-2)$，$B_1(x_2,-2)$，$Q(\dfrac{x_1+x_2}{2},-2)$， ……7 分

$k_{PA_1}=-\dfrac{4}{x_1}$,　　……8 分

$$k_{BQ}=\frac{\frac{x_2{}^2}{4}+2}{x_2-\frac{x_1+x_2}{2}}=\frac{x_2{}^2+8}{2(x_2-x_1)},$$　　……9 分

$$k_{BQ}-k_{PA_1}=\frac{x_2{}^2+8}{2(x_2-x_1)}+\frac{4}{x_1}=\frac{x_1x_2{}^2+8x_1+8(x_2-x_1)}{2x_1(x_2-x_1)},$$

$$=\frac{x_1x_2{}^2+8x_2}{2x_1(x_2-x_1)}=\frac{x_2(x_1x_2+8)}{2x_1(x_2-x_1)}=0.$$

∴　$k_{BQ}=k_{PA_1}$.　　……11 分

∴　$PA_1\parallel BQ$.　　……12 分

20.(1)$f(x)=e^x(x-2)-\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{1}{2}x^2$,

∴　$f'(x)=(e^x-x)(x-1)$.　　……1 分

令 $h(x)=e^x-x$,$h'(x)=e^x-1$,

$h'(x)>0$ 得 $x>0$,$h'(x)<0$ 得 $x<0$,

$h(x)$ 在$(-\infty,0)$上递减,在$(0,+\infty)$上递增.　　……2 分

∴　$h(x)\geqslant h(0)=1>0$ 即 $e^x-x>0$,　　……3 分

∴　解 $f'(x)>0$ 得 $x>1$,解 $f'(x)<0$ 得 $x<1$,

∴　$f(x)$ 的单调减区间为$(-\infty,1)$,单调增区间为$(1,+\infty)$.　　……4 分

(2)$f'(x)=e^x(x-2)+e^x-kx^2+kx=(e^x-kx)(x-1)$,

∵　$f(x)$ 有三个极值点,

∴　方程 $e^x-kx=0$ 有两个不等根,且都不是 1,　　……5 分

令 $g(x)=e^x-kx$,

$k\leqslant 0$ 时,$g(x)$ 单调递增,$g(x)=0$ 至多有一根,　　……6 分

∴　$k>0$ 解 $g'(x)>0$ 得 $x>\ln k$,解 $g'(x)<0$ 得 $x<\ln k$.

∴　$g(x)$ 在$(-\infty,\ln k)$上递减,在$(\ln k,+\infty)$上递增,　　……7 分

∴　$g(\ln k)=e^{\ln k}-k\ln k=k(1-\ln k)<0$,$k>e$,

此时,$g(0)=1>0$,$\ln k>1$,$g(1)=e-k<0$,$x\to+\infty$ 时 $g(x)\to+\infty$.

∴　$k>e$ 时,$f'(x)=0$ 有三个根 x_1,x_2,x_3,且 $0<x_1<1=x_2<x_3$,

……8 分

由 $e^{x_1}=kx_1$ 得 $x_1=\ln k+\ln x_1$,由 $e^{x_3}=kx_3$ 得 $x_3=\ln k+\ln x_3$,

∴　$\dfrac{\ln x_3-\ln x_1}{x_3-x_1}=1$.　　……9 分

下面证明:$\dfrac{\ln x_3-\ln x_1}{x_3-x_1}>\dfrac{2}{x_3+x_1}$,可变形为 $\ln\dfrac{x_3}{x_1}>2\dfrac{\frac{x_3}{x_1}-1}{\frac{x_3}{x_1}+1}$,　　……10 分

令 $t=\frac{x_3}{x_1}>1,\varphi(t)=\ln t-\frac{2(t-1)}{t+1}$. ……11 分

$\varphi'(t)=\frac{1}{t}-\frac{4}{(t+1)^2}=\frac{(t-1)^2}{t(t+1)^2}>0$, $\therefore$ $\varphi(t)$ 在$(1,+\infty)$上递增,

$\therefore$ $\varphi(t)>\varphi(1)=0$.

$\therefore$ $1=\frac{\ln x_3-\ln x_1}{x_3-x_1}>\frac{2}{x_3+x_1}$, $\therefore$ $x_3+x_1>2$, $\therefore$ $x_3+x_1>2x_2$.

……12 分

21.(1) 设考生成绩为 X,则依题意 X 应服从正态分布,即 $X\sim N(180,\sigma^2)$.

……2 分

令 $Y=\frac{X-180}{\sigma}$,则 $Y\sim N(0,1)$. ……3 分

由 360 分及其以上的高分考生 30 名可得 $P(X\geqslant 360)=\frac{30}{2000}$,即

$P(X<360)=1-\frac{30}{2000}\approx 0.985$,亦即 $P(Y<\frac{360-180}{\sigma})\approx 0.985$, ……4 分

则$\frac{360-180}{\sigma}=2.17$,解得 $\sigma\approx 83$. $\therefore$ $X\sim N(180,83^2)$. ……6 分

设最低录取分数线为 x_0,则 $P(X\geqslant x_0)=P(Y\geqslant\frac{x_0-180}{83})=\frac{300}{2000}$,

则 $P(Y<\frac{x_0-180}{83})=1-\frac{300}{2000}\approx 0.85$, $\therefore$ $\frac{x_0-180}{83}=1.04$.

$\therefore$ $x_0\approx 266.32$.

即最低录取分数线为 266 分或 267 分. ……8 分

(2) 考生甲的成绩 $286>267$,所以能被录取. …… 9 分

$P(X<286)=P(Y<\frac{286-180}{83})=P(Y<1.28)\approx 0.90$,表明不低于考生甲的成绩的人数约为总人数的 $1-0.90=0.10$,$2000\times 0.1\approx 200$,即考生甲大约排在第 200 名,排在 275 名之前,所以他能获得高薪职位. ……12 分

22.(1) 由已知得,圆心 $C(6,\frac{\pi}{3})$ 的直角坐标为 $C(3,3\sqrt{3})$,$r=3$, ……1 分

所以 C 的直角坐标方程为$(x-3)^2+(y-3\sqrt{3})^2=9$, …… 2 分

所以圆 C 的参数方程为$\begin{cases}x=3+3\cos\theta\\y=3\sqrt{3}+3\sin\theta\end{cases}$($\theta$ 为参数). …… 4 分

(2) 由(1) 得,圆 C 的极坐标方程为 $\rho^2-6\rho(\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta)+27=0$,

即 $\rho^2=12\rho\sin(\theta+\frac{\pi}{6})-27$. …… 6 分

设 $P(\rho,\theta)$,$Q(\rho_1,\theta_1)$, ……7 分

$\because \quad |OP|:|PQ| = 2:3$,

$\therefore \quad \rho:\rho_1 = 2:5$，又 $\theta = \theta_1$.　　　　……8 分

将 $\rho_1 = \dfrac{5}{2}\rho, \theta_1 = \theta$，代入 C 的极坐标方程，得 $25\rho^2 - 120\rho\sin(\theta + \dfrac{\pi}{6}) + 108 = 0$，

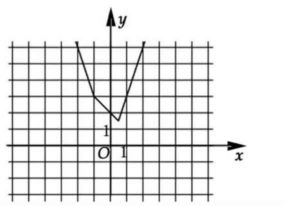
…… 9 分

即动点 P 轨迹的极坐标方程为 $25\rho^2 - 120\rho\sin(\theta + \dfrac{\pi}{6}) + 108 = 0$.

……10 分

23.(1) 根据绝对值的定义，可得 $f(x) = \begin{cases} -3x, x < -1 \\ -x+2, -1 \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{2}, \\ 3x, x > \dfrac{1}{2} \end{cases}$　　　　……3 分

所以 $y = f(x)$ 的图象如图所示：　　　　……5 分



(2) $f(x) > a - |x+1|$，

即 $|2x-1| + |2x+2| > a$，　　　　……6 分

$\because \quad |2x-1| + |2x+2| \geqslant |2x-1-2x-2| = 3$，

……8 分

$\therefore \quad a < 3$，即实数 a 的取值范围是 $(-\infty, 3)$.　　　　……10 分