科目：数学（理科）

（试题卷）

注意事项：

1. 答题前，考生务必将自己的姓名、准考证号写在答题卡和该试题卷的封面上，并认真核对条形码的姓名、准考证号和科目。

2. 选择题和非选择题均须在答题卡上作答，在本试题卷和草稿纸上作答无效。考生在答题卡上按答题卡中注意事项的要求答题。

3. 本试题卷共 7 页。如缺页，考生须及时报告监考老师，否则后果自负。

4. 考试结束后，将本试题卷和答题卡一并上交.

姓　　名________________________________

准考证号________________________________

长沙市 2020 届高三年级统一模拟考试

理科数学

本试题卷共 7 页，全卷满分 150 分，考试用时 120 分钟。

一、选择题：本大题共 12 个小题，每小题 5 分，共 60 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

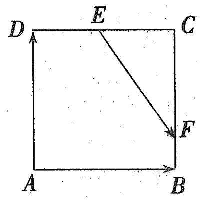
1．已知集合 $A=\left\{x\left|2^{x-1}>1\right.\right\},B=\left\{x\left|x^2-2x\leq 0\right.\right\}$，则 $A\cap B=$

A．[1，2)　　B．[1，2]　　C．(0，3]　　D．(1，2]

2．在复平面内，复数 $z=\dfrac{1+i}{i}$（i 是虚数单位）对应的点位于

A．第一象限　　B．第二象限　　C．第三象限　　D．第四象限

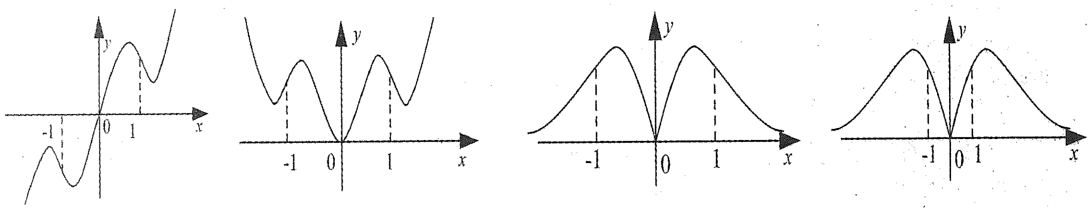
3．如图，在正方形 $ABCD$ 中，点 E 是 DC 的中点，点 F 满足 $\overrightarrow{CF}=2\overrightarrow{FB}$，那么 $\overrightarrow{EF}=$



A．$\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AD}$　　B $\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

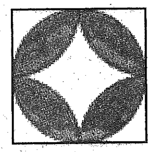
C．$\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AD}$　　D．$\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

4．函数 $y=\dfrac{x^2}{e^{|x|+1}}$（其中 e 为自然对数的底）的图象大致是



A．　　B．　　C．　　D．

5．在如图所示的正方形内任取一点 M，其中图中的圆弧为该正方形的内切圆，以及以正方形的顶点为圆心以正方形边长的一半为半径的圆弧，则点 M 恰好取自阴影部分的概率为



A．$\dfrac{1}{2}$　　B．$\dfrac{\pi}{2}$　　C．$\dfrac{\pi}{2}-1$　　D．$2-\dfrac{\pi}{2}$

6．$(3x+1)(\dfrac{1}{x}-1)^5$ 的展开式中的常数项为

A．14　　B．-14　　C．16　　D．-16

7．已知 α 为锐角，且 $\cos\alpha\left(1+\sqrt{3}\tan 10^\circ\right)=1$，则 α 的值为

A．20°　　B．40°　　C. 50°　　D．70°

8．设椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右焦点分别为$F_1,F_2$，点$E(0,t)(0<t<b)$．已知动点$P$在椭圆上,且点$P,E,F_2$不共线,若$\Delta PEF_2$的周长的最小值为$3b$，则椭圆$C$的离心率为

A．$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B．$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　C．$\frac{1}{2}$　　D．$\frac{\sqrt{5}}{3}$

9．设三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$的侧棱垂直于底面，$AB=AC=2,\angle BAC=90^{\circ},AA_1=3\sqrt{2}$，且三棱柱的所有顶点都在同一球面上，则该球的表面积是

A．24π　　B．18π　　C．26π　　D．16π

10．设S_n是数列$\{a_n\}$的前n项和，若$a_n+S_n=2^n$，$2^{b_n}=2a_{n+2}-a_{n+1}(n\in N^*)$，则数列$\left\{\frac{1}{nb_n}\right\}$的前 99 项和为

A．$\frac{97}{98}$　　B．$\frac{98}{99}$　　C．$\frac{99}{100}$　　D．$\frac{100}{101}$

11．已知函数$f(x)=\begin{cases}2+\log_{\frac{1}{2}}x, & \frac{1}{8}\le x<1\\ 2^x, & 1\le x\le 2\end{cases}$，若$f(a)=f(b)\ (a<b)$，则$ab$的最小值为

A．$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　B．$\frac{1}{2}$　　C．$\frac{\sqrt{2}}{4}$　　D．$\frac{\sqrt{5}}{3}$

12．已知双曲线$C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,b>0)$，过其右焦点$F$作渐近线的垂线，垂足为$B$，交 y 轴于点$C$，交另一条渐近线于点$A$，并且点$C$位于点$A,B$之间.已知$O$为原点，且$|OA|=\frac{5}{3}a$，则$\frac{|FA|}{|FC|}=$

A.$\frac{5}{4}$　　B.$\frac{4}{3}$　　C.$\frac{3}{2}$　　D.$\frac{\sqrt{5}}{2}$

二、填空题：本大题共 4 个小题，每小题 5 分，共 20 分..

13．已知函数$f(x)=ax-\log_2(2^x+1)+\cos x$（$a\in$R）为偶函数，则$a=$________.

14．已知S_n是等比数列$\{a_n\}$的前n项和，且S_3，S_9，S_6成等差数列，$a_2+a_5=6$，则$a_8=$_____.

15. 若$f(x)=2\sin(2x+\varphi)(\varphi>0)$的图像关于直线$x=\frac{\pi}{12}$对称，且当$\varphi$取最小值时，$\exists x_0\in(0,\frac{\pi}{2})$，使得$f(x_0)=a$，则$a$的取值范围是________.

16．在四面体$P-ABC$中，ΔABC为等边三角形，边长为6，$PA=6$，$PB=8$，$PC=10$，则四面体$P-ABC$的体积为________.

三、解答题：本大题共 7 个小题，共 70 分，解答应写出文字说明,证明过程或演算步骤.第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答，第 22，23 题为选考题，考生根据要求作答.

（一）必考题：共 60 分.

17.（本小题满分 12 分）

已知△ABC 的内角 A、B、C 的对边分别为 a、b、c，

且 $a\sin\left(A+B-C\right)=c\sin(B+C)$.

（Ⅰ）求角 C 的值；

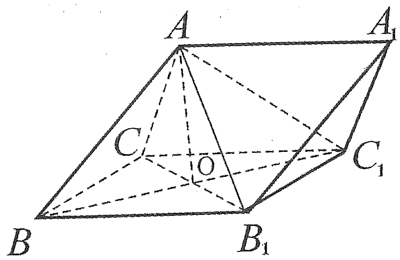
（Ⅱ）若 $2a+b=6$，且△ABC 的面积为 $\sqrt{3}$，求△ABC 的周长.

18.（本小题满分 12 分）

如图，三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，侧面 BB_1C_1C 是菱形，其对角线的交点为 O，且 $AB=AC_1$， $AB\perp B_1C$.

（Ⅰ） 求证： $AO\perp$ 平面 BB_1C_1C ；

（Ⅱ）设 $\angle B_1BC=60°$ ，若直线 A_1B_1 与平面 BB_1C_1C 所成的角为 $45°$，求二面角 $A_1-B_1C_1-B$ 的余弦值.



19.（本小题满分 12 分）

已知椭圆 C_1：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的右顶点与抛物线 C_2：$y^2=2px\ (p>0)$ 的焦点重合，椭圆 C_1 的离心率为 $\dfrac{1}{2}$，过椭圆 C_1 的右焦点 F 且垂直于 x 轴的直线截抛物线所得的弦长为 $4\sqrt{2}$．

（Ⅰ）求椭圆 C_1 和抛物线 C_2 的方程;

（Ⅱ）过点 $A(-4,0)$ 的直线 l 与椭圆 C_1 交于 M,N 两点，点 M 关于 x 轴的对称点为 E．当直线 l 绕点 A 旋转时，直线 EN 是否经过一定点？请判断并证明你的结论.

20.（本小题满分 12 分）

某市有一家大型共享汽车公司，在市场上分别投放了黄、蓝两种颜色的汽车，已知黄、蓝两种颜色的汽车的投放比例为 3:1. 监管部门为了了解这两种颜色汽车的质量，决定从投放到市场上的汽车中随机抽取 5 辆汽车进行试驾体验，假设每辆汽车被抽取的可能性相同.

（Ⅰ）求抽取的 5 辆汽车中恰有 2 辆是蓝色汽车的概率；

（Ⅱ）在试驾体验过程中，发现蓝色汽车存在一定质量问题，监管部门决定从投放的汽车中随机地抽取一辆送技术部门作进一步抽样检测，并规定：若抽取的是黄色汽车，则将其放回市场，并继续随机地抽取下一辆汽车；若抽到的是蓝色汽车，则抽样结束；并规定抽样的次数不超过 n（$n \in N^*$）次. 在抽样结束时，若已取到的黄色汽车数以 ξ 表示，求 ξ 的分布列和数学期望.

21.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=ae^x-e^{-x}-(a+1)x\ \ (a\in R)$，$f(x)$ 既存在极大值，又存在极小值.

（Ⅰ）求实数 a 的取值范围；

（Ⅱ）当 $0<a<1$ 时，x_1,x_2 分别为 $f(x)$ 的极大值点和极小值点，且 $f(x_1)+kf(x_2)>0$，求实数 k 的取值范围.

（二）选考题：共 10 分.请考生在第 22、23 题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题计分.

22.（本小题满分 10 分）**选修 4—4：坐标系与参数方程**

在平面直角坐标系 xOy 中，直线 l_1 的参数方程为 $\begin{cases} x = t - \sqrt{3} \\ y = kt \end{cases}$（$t$ 为参数），直线 l_2 的参数方程为 $\begin{cases} x = \sqrt{3} - m \\ y = \dfrac{m}{3k} \end{cases}$（$m$ 为参数）．设直线 l_1 与 l_2 的交点为 P．当 k 变化时点 P 的轨迹为曲线 C_1．

（Ⅰ）求出曲线 C_1 的普通方程；

（Ⅱ）以坐标原点为极点，x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系，直线 C_2 的极坐标方程为 $\rho\sin\left(\theta + \dfrac{\pi}{4}\right) = 3\sqrt{2}$，点 Q 为曲线 C_1 上的动点，求点 Q 到直线 C_2 的距离的最大值.

23.（本小题满分 10 分）选修 4—5：不等式选讲

已知函数 $f(x) = |x - 1|$.

（Ⅰ）求不等式 $f(x) \geq 3 - 2|x|$ 的解集；

（Ⅱ）若函数 $g(x) = f(x) + |x - 5|$ 的最小值为 m，正数 a, b 满足 $a + b = m$，

求证：$\dfrac{a^2}{b} + \dfrac{b^2}{a} \geq 4$.