

## 河北衡水中学 2020 届全国高三第三次联合考试 (I)

### 理科数学

本试卷 4 页。总分 150 分。考试时间 120 分钟。

注意事项:

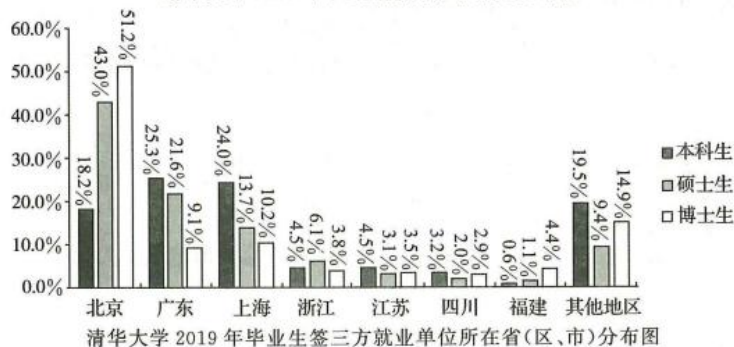
- 答卷前,考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上相应的位置。
- 全部答案在答题卡上完成,答在本试卷上无效。
- 回答选择题时,选出每小题答案后,用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案用 0.5 mm 黑色笔迹签字笔写在答题卡上。
- 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题:本题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

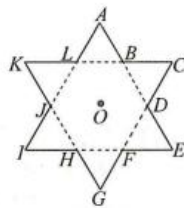
- 已知集合  $M = \{x | x^2 + x > 0\}$ ,  $N = \{x | \ln(x-1) > 0\}$ , 则  
A.  $M \supseteq N$                       B.  $M \subseteq N$                       C.  $M \cap N = (1, +\infty)$                       D.  $M \cup N = (2, +\infty)$
- 已知复数  $z = (2+i)^2$ , 则  $z$  的虚部为  
A. 3                                  B. 3i                                  C. 4                                  D. 4i
- 以下统计表和分布图取自《清华大学 2019 年毕业生就业质量报告》。

毕业去向	本科生		硕士生		博士生		总体	
	人数	比例	人数	比例	人数	比例	人数	比例
深造	2 282	80.4%	231	9.3%	489	33.6%	3 002	44.2%
国内	1 583	55.8%	94	3.8%	290	19.9%	1 967	29.0%
出国(境)	699	24.6%	137	5.5%	199	13.7%	1 035	15.3%
就业	490	17.3%	2 224	89.2%	943	64.8%	3 657	53.9%
签三方就业	154	5.4%	1 656	66.4%	864	59.4%	2 674	39.4%
灵活就业	336	11.8%	568	22.8%	79	5.4%	983	14.5%
未就业	64	2.3%	39	1.6%	23	1.6%	126	1.9%
合计	2 836	100.0%	2 494	100.0%	1 455	100.0%	6 785	100.0%

清华大学 2019 年毕业生去向分布情况统计表

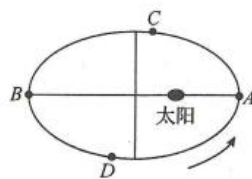


- 则下列选项错误的是
- A. 清华大学 2019 年毕业生中,大多数本科生选择继续深造,大多数硕士生选择就业  
 B. 清华大学 2019 年毕业生中,硕士生的就业率比本科生高  
 C. 清华大学 2019 年签三方就业的毕业生中,本科生的就业城市比硕士生的就业城市分散  
 D. 清华大学 2019 年签三方就业的毕业生中,留北京人数超过一半
4. 若圆  $(x-2)^2+(y-1)^2=5$  关于直线  $ax+by-1=0(a>0,b>0)$  对称,则  $\frac{2}{a}+\frac{1}{b}$  的最小值为  
 A. 4                      B.  $4\sqrt{2}$                       C. 9                      D.  $9\sqrt{2}$
5. 要使得满足约束条件  $\begin{cases} y \leq x, \\ y \geq x-4, \\ x+y \geq 2 \end{cases}$  的变量  $x, y$  表示的平面区域为正方形,则可增加的一个约束条件为  
 A.  $x+y \leq 4$                       B.  $x+y \geq 4$                       C.  $x+y \leq 6$                       D.  $x+y \geq 6$
6. 若  $\{a_n\}$  是公比为  $q(q \neq 0)$  的等比数列,记  $S_n$  为  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和,则下列说法正确的是  
 A. 若  $\{a_n\}$  是递增数列,则  $a_1 < 0, q < 0$   
 B. 若  $\{a_n\}$  是递减数列,则  $a_1 > 0, 0 < q < 1$   
 C. 若  $q > 0$ , 则  $S_4 + S_6 > 2S_5$   
 D. 若  $b_n = \frac{1}{a_n}$ , 则  $\{b_n\}$  是等比数列
7. 为了得到函数  $g(x) = \sin x$  的图象,需将函数  $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right)$  的图象  
 A. 向左平移  $\frac{\pi}{6}$  个单位长度                      B. 向右平移  $\frac{\pi}{6}$  个单位长度  
 C. 向左平移  $\frac{5\pi}{6}$  个单位长度                      D. 向右平移  $\frac{5\pi}{6}$  个单位长度
8. 设  $f(x)$  是定义在  $\mathbf{R}$  上的奇函数,且当  $x \geq 0$  时,  $f(x) = x - \frac{1}{3} \sin 2x$ . 若  $a = f\left(\tan \frac{2\pi}{5}\right)$ ,  $b = f\left(\log_3 \cos \frac{2\pi}{5}\right)$ ,  $c = f\left(\cos \frac{2\pi}{5}\right)$ , 则  $a, b, c$  的大小关系为  
 A.  $a < b < c$                       B.  $b < c < a$                       C.  $b < a < c$                       D.  $c < b < a$
9. 如图是由等边  $\triangle AIE$  和等边  $\triangle KGC$  构成的六角星,图中的  $B, D, F, H, J, L$  均为三等分点,两个等边三角形的中心均为  $O$ . 若  $\overrightarrow{OA} = m\overrightarrow{OC} + n\overrightarrow{OJ}$ , 则  $\frac{m}{n} =$   
 A.  $\frac{1}{2}$   
 B.  $\frac{2}{3}$   
 C.  $\frac{3}{4}$   
 D. 1
10. 区块链是数据存储、传输、加密算法等计算机技术的新型应用模式,图论是区块链技术的一个主要的数学模型. 在一张图中有若干点,有的点与点之间有边相连,有的没有边相连,边可以是直线段,也可以是曲线段. 我们规定图中无重边(即两个点之间最多只有一条边)且无孤立点(即对于每个点,都至少存在另外一个点与之相连). 现有  $A, B, C, D$  四个点. 若图中恰有 3 条边,则满足上述条件的图的个数为  
 A. 4                      B. 8                      C. 12                      D. 16



11. 地球的公转轨道可以看作是以太阳为一个焦点的椭圆,根据开普勒行星运动第二定律,可知太阳和地球的连线在相等的时间内扫过相等的面积.某同学结合物理和地理知识得到以下结论:

①地球到太阳的距离取得最小值和最大值时,地球分别位于图中A点和B点;②已知地球公转轨道的长半轴长约为149 600 000千米,短半轴长约为149 580 000千米,则该椭圆的离心率约为1,因此该椭圆近似于圆形;③已知我国每逢春分(3月21日前后)和秋分(9月23日前后),地球会分别运行至图中C点和D点,则由此可知我国每年的夏半年(春分至秋分)比冬半年(当年秋分至次年春分)要少几天.



以上结论正确的是

- A. ①                      B. ①②                      C. ②③                      D. ①③
12. 正方体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  的棱长为2,在  $A, B, C, D, C_1, D_1$  这六个顶点中,选择两个点与  $A_1, B_1$  构成正三棱锥  $P$ ,在剩下的四个顶点中选择两个点与  $A_1, B_1$  构成正三棱锥  $Q$ ,  $M$  表示  $P$  与  $Q$  的公共部分,则  $M$  的体积为
- A.  $\frac{1}{3}$                       B.  $\frac{\sqrt{2}}{4}$                       C.  $\frac{2}{3}$                       D. 1

二、填空题:本题共4小题,每小题5分,共20分。

13.  $(x - \frac{2}{x})^6$  的展开式中  $x^2$  的系数为\_\_\_\_\_。(用数字作答)
14. 记  $S_n$  为正项等差数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和,若  $a_1=1, a_3 \cdot a_4 = S_7$ ,则  $S_n =$ \_\_\_\_\_.
15. 若抛物线  $y^2 = 2px (p > 0)$  的焦点到双曲线  $2y^2 - x^2 = 2p^2$  的一个焦点的距离为  $\sqrt{13}$ ,则  $p$  的值为\_\_\_\_\_.
16. 已知函数  $f(x) = (kx + 2k)e^x - x - 1$ ,若  $f(x) < 0$  的解集中恰有三个整数,则实数  $k$  的取值范围为\_\_\_\_\_.

三、解答题:共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第17~21题为必考题,每个试题考生都必须作答。第22、23题为选考题,考生根据要求作答。

(一)必考题:共60分。

17. (12分)

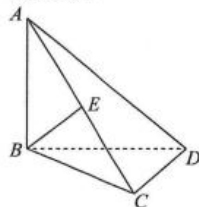
在锐角  $\triangle ABC$  中,内角  $A, B, C$  所对的边分别为  $a, b, c$ ,若  $c \cos B = b \cos C$ ,  $BC$  边上的高  $AD = 12, \sin \angle BAC = \frac{4}{5}$ .

- (1)求  $BC$  的长;  
(2)过点  $A$  作  $AE \perp AB$ ,垂足为  $A$ ,且  $\angle CAE$  为锐角,  $AE = 3\sqrt{5}$ ,求  $\sin \angle ACE$ .

18. (12分)

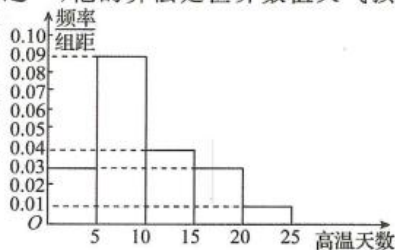
如图,在三棱锥  $A-BCD$  中,  $AB \perp$  平面  $BCD$ ,  $E$  为棱  $AC$  上的一点,且  $BE \perp$  平面  $ACD$ .

- (1)证明:  $BC \perp CD$ ;  
(2)设  $BC = CD = 1, BC$  与平面  $ACD$  所成的角为  $45^\circ$ ,求二面角  $B-AD-C$  的大小.



19. (12分)

2020年1月10日,中国工程院院士黄旭华和中国科学院院士曾庆存荣获2019年度国家最高科学技术奖.曾庆存院士是国际数值天气预报奠基人之一,他的算法是世界数值天气预报核心技术的基础.在气象预报中,过往的统计数据至关重要.右图是根据甲地过去50年的气象记录所绘制的每年高温天数(若某天气温达到 $35^{\circ}\text{C}$ 及以上,则称之为高温天)的频率分布直方图.若某年的高温天达到15天及以上,则称该年为高温年.假设每年是否为高温年相互独立,以这50年中每年高温天数的频率作为今后每年是否为高温年的概率.



- (1) 求今后4年中,甲地至少有3年为高温年的概率.
- (2) 某同学在位于甲地的大学里勤工俭学,成为了校内奶茶店(消费区在户外)的店长.为了减少高温年带来的损失,该同学现在有两种方案选择:
  - 方案一:不购买遮阳伞,一旦某年为高温年,则预计当年的收入会减少6000元;
  - 方案二:购买一些遮阳伞,费用为5000元,可使用4年,一旦某年为高温年,则预计当年的收入会增加1000元.
 以4年为期,试分析该同学是否应该购买遮阳伞?

20. (12分)

已知椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的左、右焦点分别为  $F_1, F_2$ , 且  $|F_1F_2| = 2\sqrt{3}$ . 过椭圆的右焦点  $F_2$  作长轴的垂线, 与椭圆在第一象限交于点  $P$ , 且满足  $\frac{|PF_1|}{|PF_2|} = 7$ .

- (1) 求椭圆的标准方程;
- (2) 若矩形  $ABCD$  的四条边均与椭圆相切, 求该矩形面积的取值范围.

21. (12分)

已知函数  $f(x) = e^x + x - 2, g(x) = \ln x + x$ , 若  $x_1$  是函数  $f(x)$  的零点,  $x_2$  是函数  $g(x)$  的零点.

- (1) 比较  $x_1$  与  $x_2$  的大小;
- (2) 证明:  $f(x_2) + g(x_1) < 0$ .

(二) 选考题: 共10分. 请考生在第22、23题中任选一题作答. 如果多做, 则按所做的第一题计分.

22. [选修4-4: 坐标系与参数方程](10分)

在直角坐标系  $xOy$  中, 曲线  $C$  的参数方程为  $\begin{cases} x = t - 2, \\ y = t^2 - 2t \end{cases}$  ( $t$  为参数), 曲线  $C$  上异于原点的两点  $M, N$  所对应的参数分别为  $t_1, t_2$ . 以坐标原点  $O$  为极点,  $x$  轴的正半轴为极轴建立极坐标系, 曲线  $D$  的极坐标方程为  $\rho = 2a \sin \theta$ .

- (1) 当  $t_1 = 1, t_2 = 3$  时, 直线  $MN$  平分曲线  $D$ , 求  $a$  的值;
- (2) 当  $a = 1$  时, 若  $t_1 + t_2 = 2 + \sqrt{3}$ , 直线  $MN$  被曲线  $D$  截得的弦长为  $\sqrt{3}$ , 求直线  $MN$  的方程.

23. [选修4-5: 不等式选讲](10分)

已知函数  $f(x) = |x+1| + 2|x-3|, g(x) = a|x-1|$ .

- (1) 求  $f(x) \leq 8$  的解集;
- (2) 当  $x \in [-1, 3]$  时,  $f(x) \geq g(x)$  恒成立, 求实数  $a$  的取值范围.

## 关于我们

自主招生在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（<http://www.zizzs.com/>）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主招生在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

自主选拔在线