2020 年哈尔滨市第三中学校第二次高考模拟考试

数学试卷（理工类）答案及评分标准

一、选择题：

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	B	D	A	C	C	A	D	D	A	A	B	B

二、填空题：

13. 1　　14. $\frac{3}{5}$　　15. $\frac{20}{27}$　　16. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1,\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{7}=1;\frac{15}{2}$

三、解答题：

17.（1）依题意 $a+b=0.046,1000(b-a)=6$，

解得 $a=0.020,b=0.026$ ……………………………………2 分

中位数为 $112\frac{4}{13}$ ……………………………………5 分

（2）（i）$(0.005+0.01\div 2)\times 1000-10$，$\frac{10}{100}\times 1500-150$

所以估计全学年获奖人数为 150 人……………………………………8 分

（ii）设所选 3 人中获奖人数为 X ,则 $X\sim B(3,0.1)$ ……………………………………9 分

则 $P(X\geq 2)=C_3^2\times 0.1^2\times 0.9+0.1^3=0.028$

所以所选 3 人中至少有 2 人获奖的概率为 0.028 ……………………………………12 分

18.（1）$\because a_1=-3$，a_3,a_4,S_5+4 成等比数列，

$\therefore a_4^2=a_3(S_5+4)$，即 $(-3+3d)^2-(-3+2d)(-11+10d)$，

解得 $d=2$ 或 $d=\frac{12}{11}$（舍去），$\therefore a_n=2n-5$ ……………………………………2 分

设等比数列 $\{b_n\}$ 的公比为 q，

$\because b_1=2$，$b_2=2^3-2-(2^2-2)=4$，$\therefore q=\frac{b_2}{b_1}=2$，$\therefore b_n=2^n$ ……………………4 分

官方微信公众号：zizzsw　　咨询热线：010-5601 9830
官方网站：www.zizzs.com　　微信客服：zizzs2018

（2）$\because c_n=|2n-5|\cdot 2^n$，当$n=1$时，$T_1=6$；当$n=2$时，$T_2=10$……………6 分

当$n\geq 3$时，$2n-5>0$，$T_n=10+1\times 2^3+3\times 2^4+\cdots+(2n-7)\cdot 2^{n-1}+(2n-5)\cdot 2^n$ ①

$2T_n=20+1\times 2^4+3\times 2^5+\cdots+(2n-7)\cdot 2^n+(2n-5)\cdot 2^{n+1}$ ②

①—②$\Rightarrow -T_n=-10+8+2\left(2^4+\cdots+2^n\right)-(2n-5)\cdot 2^{n+1}$，

可得$T_n=34+(2n-7)\cdot 2^{n+1}$，……………………………………………10 分

$\therefore T_n=\begin{cases}6, n=1\\ 34+(2n-7)\cdot 2^{n+1}, n\geq 2\end{cases}$ ……………………………………12 分

19.（1）因为$AB=AA_1=A_1B$，F为AB中点，所以$A_1F\perp AB$.

因为平面$AA_1B_1B\perp$平面ABC，平面$AA_1B_1B\cap$平面$ABC=AB$，$A_1F\subset$平面AA_1B_1B，

所以$A_1F\perp$平面ABC，而$BC\subset$平面ABC，故$A_1F\perp BC$，……………………2 分

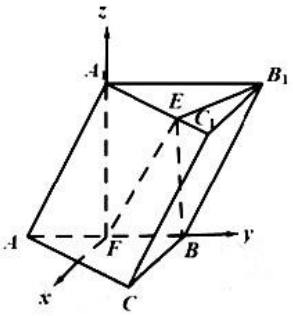
又因为$BC^2+AC^2=AB^2$，所以$BC\perp AC$，

又$\because$在三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，$AC//A_1C_1$，$\therefore BC\perp A_1C, BC\perp A_1E$，

又$A_1C_1\cap A_1E=A_1$，故$BC\perp$平面A_1EF，

又$EF\subset$平面A_1EF，所以$BC\perp EF$……………………………………………4 分

（2）以点F为原点，以Fx, FB, FA_1为x, y, z轴建立如图所示的空间直角坐标系，



则 $A(0,-2,0)$、$A_1(0,0,2\sqrt{3})$、$B(0,2,0)$、$B_1(0,4,2\sqrt{3})$、$C(\sqrt{3},1,0)$，

设 $\overrightarrow{AE}=\lambda\overrightarrow{A_1C_1}\ (0<\lambda<1)$，由 $\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{FA_1}+\overrightarrow{A_1E}$ 得：$\overrightarrow{FE}=(\sqrt{3}\lambda,3\lambda,2\sqrt{3})$，

又 $\overrightarrow{FB}=(0,2,0)$ 设平面 BEF 的法向量为 $\vec{m}=(x_1,y_1,z_1)$

$$\begin{cases}\sqrt{3}\lambda x_1+3\lambda y_1+2\sqrt{3}z_1=0\\ 2y_1=0\end{cases}\Rightarrow \vec{m}=\left(\frac{2}{\lambda},0,-1\right)，\ \overrightarrow{BC}=(\sqrt{3},-1,0)$$

则 BC 与平面 BEF 所成角的正弦 $=\cos\left\langle\overrightarrow{BC},\vec{m}\right\rangle=\dfrac{\frac{2\sqrt{3}}{\lambda}}{\sqrt{\frac{4}{\lambda^2}+1}\cdot 2}=\dfrac{2\sqrt{51}}{17}$

$\therefore \lambda=\dfrac{1}{2}$ ……………………………………………………………………………………6 分

又平面 AA_1B_1B 的一个法向量 $\vec{a}=(1,0,0)$，

又 $\overrightarrow{BE}=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},-\dfrac{1}{2},2\sqrt{3}\right)$，$\overrightarrow{BB_1}=(0,2,2\sqrt{3})$，

设平面 EBB_1 的一个法向量为 $\vec{b}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\dfrac{\sqrt{3}}{2}x-\dfrac{1}{2}y+2\sqrt{3}z=0\\ 2y+2\sqrt{3}z=0\end{cases}$，则平面 EBB_1 的一个法向量为 $\vec{b}=(-5\sqrt{3},-3,\sqrt{3})$….10 分

设二面角 $E-BB_1-A_1$ 的平面角为 θ，则 $|\cos\theta|=\left|\cos\left\langle\vec{a},\vec{b}\right\rangle\right|=\dfrac{5\sqrt{29}}{29}$，

又∵二面角 $E-BB_1-A_1$ 的平面角为锐角，则二面角 $E-BB_1-A_1$ 的余弦值为 $\dfrac{5\sqrt{29}}{29}$

……………………………………………………………………………………………12 分

20.（1）直线 A_1B_1 的方程为 $-\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$，

由题意可得 $\begin{cases}2ab=4\sqrt{3}\\ \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}}}=\frac{2}{7}\sqrt{21}\end{cases}$，解得 $\begin{cases}a=2\\ b=\sqrt{3}\end{cases}$，

$\therefore$ 椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$……………………………………………………………4 分

（2）当直线 AB 的斜率不存在时，直线 AB 的方程为 $x=\pm1$，此时 $S_{\square OAPB}=3$….5 分

当直线 AB 的斜率存在时，设 $AB:y=kx+m$，$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，

联立 $\begin{cases}\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1\\ y=kx+m\end{cases}$，可得 $(4k^2+3)x^2+8kmx+4m^2-12=0$，

则 $\Delta=48(4k^2-m^2+3)>0$，

$x_1+x_2=-\frac{8km}{4k^2+3},x_1x_2=\frac{4m^2-12}{4k^2+3}$，

$y_1+y_2=k(x_1+x_2)+2m=\frac{6m}{4k^2+3}$，……………………………………………………7 分

$\because$ 四边形 $OAPB$ 为平行四边形，$\therefore \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OP}$，$\therefore P(-\frac{8km}{4k^2+3},\frac{6m}{4k^2+3})$，

$\because$ 点 P 在椭圆上，$\therefore \frac{(-\frac{8km}{4k^2+3})^2}{4}+\frac{(\frac{6m}{4k^2+3})^2}{3}=1$，整理得 $m^2=k^2+\frac{3}{4}$，……8 分

$|AB|=\sqrt{1+k^2}|x_1-x_2|=\sqrt{1+k^2}\cdot\frac{4\sqrt{3}\cdot\sqrt{4k^2-m^2+3}}{4k^2+3}$，…………………………9 分

原点 O 到直线 AB 的距离 $d=\frac{|m|}{\sqrt{k^2+1}}$，

$S_{\square OAPB}=|AB|\cdot d=\frac{4\sqrt{3}|m|\sqrt{4k^2-m^2+3}}{4k^2+3}=3$，……………………………………11 分

4

综上，四边形$OAPB$的面积为定值3……………………………………………………12分

21.（1）$f'(x)=m+m\ln x-\dfrac{m+1}{x}=h(x)$

$h'(x)=\dfrac{m}{x}+\dfrac{m+1}{x^2}=\dfrac{mx+m+1}{x^2}$ ……………………………………………………2分

当$m\ge 0$时，$f'(x)$在$(0,+\infty)$单调递增；

当$-1<m<0$时，$f'(x)$在$(0,-\dfrac{m+1}{m})$单调递增，在$(-\dfrac{m+1}{m},+\infty)$单调递减；

当$m\le -1$时，$f'(x)$在$(0,+\infty)$单调递减……………………………………………5分

（2）设$F(x)=f(x)-g(x)=mx\ln x-(m+1)\ln x+x-\dfrac{3}{e}$

$F'(x)=m\ln x+m-\dfrac{m+1}{x}+1=\varphi(x)$，由于$m>0$，$x>0$

$\varphi'(x)=\dfrac{m}{x}+\dfrac{m+1}{x^2}>0$恒成立……………………………………………………6分

知函数$F'(x)$在$(0,+\infty)$上为增函数且$F'(1)=0$ ……………………………………7分

x	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$F'(x)$	-	0	+
$F(x)$	递减	极小值	递增

$F(1)=1-\dfrac{3}{e}=\dfrac{e-3}{e}<0$

$F\left(\dfrac{1}{e}\right)=m\dfrac{e-1}{e}+\dfrac{e-2}{e}>0$，$F(e)=m(e-1)+\dfrac{e(e-1)-3}{e}>0$ ………………10分

知$F(x)$在区间$\left(\dfrac{1}{e},1\right)$以及$(1,e)$内各有一个零点，即为$x_1\in\left(\dfrac{1}{e},1\right)$，$x_2\in(1,e)$，

知$x_2-x_1<e-\dfrac{1}{e}$，即$x_2+\dfrac{1}{e}<x_1+e$……………………………………………………12分

5

22.（1）消去参数可得 C 的直角坐标方程为 $x^2+\left(y-4\right)^2=4$，

将 $\begin{cases}x=\rho\cos\theta\\ y=\rho\sin\theta\end{cases}$ 代入得 C 的极坐标方程为 $\rho^2-8\rho\sin\theta+12=0$，…………………2 分

又 l 的极坐标方程为 $\theta=\beta(\rho\in R)$，将 $\theta=\beta$ 代入 C_1 得 $\rho^2-8\rho\sin\beta+12=0$，

则 $\Delta=(8\sin\beta)^2-48=0$，$\sin\beta=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

又 $0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$，所以 $\sin\beta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\beta=\dfrac{\pi}{3}$，

此时 $\rho=2\sqrt{3}$，所以点 P 的极坐标为 $\left(2\sqrt{3},\dfrac{\pi}{3}\right)$………………………………………4 分

（2）由 C_1 的直角坐标方程为 $\left(x-2\sqrt{3}\right)^2+y^2=10$，所以圆心 $C_1(2\sqrt{3},0)$，

设 $A\left(\rho_1,\dfrac{\pi}{6}\right),B\left(\rho_2,\dfrac{\pi}{6}\right)$，将 $\theta=\dfrac{\pi}{6}$ 代入 C_1 的极坐标方程 $\rho^2-4\sqrt{3}\rho\cos\theta+2=0$，

得 $\rho^2-6\rho+2=0$，$\Delta=28>0$，

所以 $\rho_1+\rho_2=6$，$\rho_1\rho_2=2$，所以 $\rho_1>0$，$\rho_2>0$，……………………………6 分

又因为 $S=\dfrac{1}{2}\rho_1\rho_P\sin(\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{6})=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\rho_1$，$S'=\dfrac{1}{2}|OC_1|\rho_2\sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\rho_2$，

所以 $\dfrac{S}{S'}+\dfrac{S'}{S}=\dfrac{\rho_1}{\rho_2}+\dfrac{\rho_2}{\rho_1}=\dfrac{\left(\rho_1+\rho_2\right)^2-2\rho_1\rho_2}{\rho_1\rho_2}=\dfrac{6^2-2\times2}{2}=16$……………………10 分

23.（1）$|x-2|-|2x-3|\geq-\dfrac{1}{2}$，

当 $x\geq2$ 时，$(x-2)-(2x-3)\geq-\dfrac{1}{2}$，此时解集为 $\varnothing$；

当 $\dfrac{3}{2}\leq x<2$ 时，$(2-x)-(2x-3)\geq-\dfrac{1}{2}$，解得 $\dfrac{3}{2}\leq x\leq\dfrac{11}{6}$；

当 $x<\dfrac{3}{2}$ 时，$(2-x)+(2x-3)\geq-\dfrac{1}{2}$，解得 $\dfrac{1}{2}\leq x<\dfrac{3}{2}$.

综上，不等式的解集为$\{x|\frac{1}{2}\le x\le\frac{11}{6}\}$……5分

（2）$f(x)=\begin{cases}1-x,x\ge 2\\5-3x,\frac{3}{2}\le x<2\\x-1,x<\frac{3}{2}\end{cases}$，$f(x)$的最大值为$m=\frac{1}{2}$，……6分

$\therefore\frac{1}{a}+b=1$，即$ab+1=a$，

$2\sqrt{\frac{b}{a}}\le\frac{1}{a}+b=1$，$\frac{b}{a}\le\frac{1}{4}$，$\frac{a}{b}\ge 4$……7分

$$\therefore(a^2-1)(\frac{1}{b^2}-1)=\frac{a^2}{b^2}-a^2-\frac{1}{b^2}+1=\frac{a^2}{b^2}-\frac{a^2b^2+1}{b^2}+1=\frac{a^2}{b^2}-\frac{(ab+1)^2-2ab}{b^2}+1$$

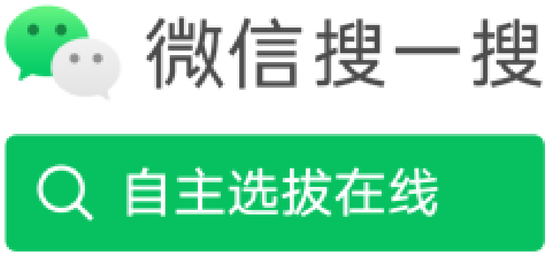
$$=\frac{a^2}{b^2}-\frac{a^2-2ab}{b^2}+1=\frac{2a}{b}+1\ge 9$$……10分

官方微信公众号：zizzsw　　咨询热线：010-5601 9830
官方网站：www.zizzs.com　　微信客服：zizzs2018

关于我们

自主招生在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（http://www.zizzs.com/）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主招生在线**官方微信号：**zizzsw**。



自主招生在线 微信号：zizzsw