2020 届普通高中教育教学质量监测考试

全国Ⅰ卷　文科数学　参考答案

本试卷防伪处为：

有六个人员尚未确定

已知曲线 C_1 的参数方程

1. C 【解析】$\because \complement_U A=\{x|(x+1)(x-2)\leqslant 0\}=\{x|-1\leqslant x\leqslant 2\}$，$\therefore (\complement_U A)\cap B=\{x|-1\leqslant x\leqslant 1\}$.

2. A 【解析】$\because z=\frac{5}{1+2\mathrm{i}}+\mathrm{i}=\frac{5(1-2\mathrm{i})}{5}+\mathrm{i}=1-\mathrm{i}$，所以共轭复数为 $1+\mathrm{i}$.

3. B 【解析】因为向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 满足 $\boldsymbol{a}\cdot(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\frac{11}{2}$，所以 $2|\boldsymbol{a}|^2+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2(m^2+4)+2m-2=\frac{11}{2}$，$\therefore m^2+m+\frac{1}{4}=0$，$\therefore m=-\frac{1}{2}$.

4. A 【解析】由图可知，来自影响稍弱区的指标有激励措施、工作环境、人际关系等三项，设为 A,B,C，其余三项设为 a,b,c，则从中任选两项的结果为 $(A,B),(A,C),(A,a),(A,b),(A,c),(B,C),(B,a),(B,b),(B,c),(C,a),(C,b),(C,c),(a,b),(a,c),(b,c)$ 共 15 种结果，这两项来自影响稍弱区的结果为 $(A,B),(A,C),(B,C)$ 共 3 种，故概率 $P=\frac{3}{15}=\frac{1}{5}$.

5. A 【解析】由题知，小李不参加，则乙不参加，所以甲一定参加；甲参加，则丙和丁都参加，但无法确认小周是否参加.

6. A 【解析】根据题意，函数 $f(x)$ 图象的纵坐标不变，横坐标变为原来的 $\frac{1}{\omega}$ 倍，$\therefore y=\sin(\omega x+\frac{\pi}{6})$，当 $x\in[0,2\pi]$ 时，$\omega x+\frac{\pi}{6}\in[\frac{\pi}{6},2\pi\omega+\frac{\pi}{6}]$，$\because f(x)$ 在 $[0,2\pi]$ 上恰有 5 个不同的 x 值，使其取到最值，$\therefore \frac{9\pi}{2}\leqslant 2\pi\omega+\frac{\pi}{6}<\frac{11\pi}{2}$，$\therefore \frac{13}{6}\leqslant\omega<\frac{8}{3}$.

7. B 【解析】由题意 $f(0)=1-k=0$，$\therefore k=1$，所以 $f(x)=\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}+2\sin x$，因为 $f'(x)=\mathrm{e}^x+\frac{1}{\mathrm{e}^x}+2\cos x\geqslant 2+2\cos x\geqslant 0$，所以函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，因为 $\log_4\frac{4}{5}=\frac{\log_2\frac{4}{5}}{\log_2 4}=\log_2(\frac{4}{5})^{\frac{1}{2}}$，$\log_8\frac{8}{9}=\frac{\log_2\frac{8}{9}}{\log_2 8}=\log_2(\frac{8}{9})^{\frac{1}{3}}=\log_2\frac{2}{\sqrt[3]{9}}$，$\because \frac{9}{16}<\frac{4}{5}<\frac{4}{\sqrt[3]{81}}$，$\therefore \frac{3}{4}<(\frac{4}{5})^{\frac{1}{2}}<\frac{2}{\sqrt[3]{9}}$，所以 $a<b<c$.

8. B 【解析】设 $OP=r$，过点 D 作 OC 的平行线交与 CD 平行的半径于点 E，则 $OE=OC=CD=OD=r$，$PC=PD=\sqrt{2}r$，所以 $\angle PDE$（或其补角）为异面直线 OC 与 PD 所成的角，在三角形 PDE 中，$PE=PD=\sqrt{2}r$，$DE=r$，所以 $\cos\angle PDE=\frac{\frac{r}{2}}{\sqrt{2}r}=\frac{\sqrt{2}}{4}$.

9. A 【解析】由题意，$F_1(-2,0)$，抛物线 $C_2:y^2=8x$，计算可得 $|PF_1|=\sqrt{2}$，$|PF_2|=2a-\sqrt{2}=4\sqrt{2}-\sqrt{2}=3\sqrt{2}$，过 Q 作 $QM\perp$ 直线 l 于 M，由抛物线定义知 $|QF_2|=|QM|$，$\because \frac{|F_1F_2|}{|PF_2|}=\frac{|MQ|}{|PQ|}$，$\therefore \frac{4}{3\sqrt{2}}=\frac{|MQ|}{3\sqrt{2}-|MQ|}$，$\therefore |MQ|=12(3-2\sqrt{2})$.

10. C 【解析】$\because f'(x)=k\cos x$，$\therefore f'(0)=k$，所以切线 l 的方程为 $y=kx+2$，过 $(0,2)$，$y'=3x^2-2x-3$，设切点为 (x_0,y_0)，故切线方程为 $y-y_0=(3x_0^2-2x_0-3)(x-x_0)$，将 $(0,2)$ 代入切线方程，解得 $x_0=-1$，$y_0=0$，代入 $y=kx+2$，解得 $k=2$.

11. D 【解析】由题意，$a=\sin\alpha+\cos\alpha=\sqrt{2}\sin(\alpha+\frac{\pi}{4})$，$b=\sin\beta+\cos\beta=\sqrt{2}\sin(\beta+\frac{\pi}{4})$，因 $0\leqslant\alpha\leqslant\beta\leqslant\frac{\pi}{4}$，所以 $\frac{\pi}{4}\leqslant\alpha+\frac{\pi}{4}\leqslant\beta+\frac{\pi}{4}\leqslant\frac{\pi}{2}$，则 $\sin(\alpha+\frac{\pi}{4})\leqslant\sin(\beta+\frac{\pi}{4})$，$\therefore 1\leqslant a\leqslant b\leqslant\sqrt{2}$，$\therefore 1\leqslant ab\leqslant 2$，故①②正确；画出 $1\leqslant a\leqslant b\leqslant\sqrt{2}$ 满足的可行域，设目标函数 $z=2a-b$，则 $b=2a-z$，当直线 $b=2a-z$ 经过 $(\sqrt{2},\sqrt{2})$ 和 $(1,\sqrt{2})$ 时，$-z$ 取得最小值和最大值，

所以 $2-\sqrt{2}\leqslant 2a-b\leqslant\sqrt{2}$. 故③正确.

12. B 【解析】由 MN 为直径的圆过 F_2, 由 $\overrightarrow{MF_2}\cdot\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{MN}^2$ 知, $MF_2=NF_2$, 且 $MF_2\perp NF_2$, 设 $|MF_2|=|NF_2|=m$, 则 $|MN|=\sqrt{2}m$, 由 $|MF_2|-|MF_1|=2a$, $|NF_1|-|NF_2|=2a$, 两式相加可得 $|NF_1|-|MF_1|=|MN|=4a$, 即有 $m=2\sqrt{2}a$, 设 H 为 MN 的中点, 在直角三角形 HF_1F_2 中可得 $4c^2=4a^2+(2a+2\sqrt{2}a-2a)^2$, 化为 $c^2=3a^2$, 即 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{3}$, 因为 $|HF_2|=\frac{1}{2}|MN|=2a$, 所以 $|HF_1|=\sqrt{|F_1F_2|^2-|HF_2|^2}=2\sqrt{c^2-a^2}$, 所以直线 l 的斜率为 $\frac{|HF_2|}{|HF_1|}=\frac{2a}{2\sqrt{c^2-a^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

13. $\frac{11}{18}$ 【解析】由题意可知, 该学生在 19∶00 至 20∶30之间的加入群聊, 其时间长度为 90 分钟. 该学生等待直播的时间不超过 30 分钟, 则应该在 19∶35 至 20∶30 分之间的任意时刻加入, 区间长度为 55. 由测度比为长度比, 可知他等待直播的时间不超过 30 分钟的概率是 $\frac{55}{90}=\frac{11}{18}$.

14. $[1,2]$ 【解析】根据题意, $a=1$, 所以 $f(x)=(\frac{1}{2})^{|x-1|}$, $\because(\frac{1}{2})^{|2x-3|}\geqslant\frac{1}{2}$, $\therefore|2x-3|\leqslant1$, $\therefore-1\leqslant 2x-3\leqslant1$, $\therefore1\leqslant x\leqslant2$.

15. $\frac{\pi}{3}$; $\frac{5\sqrt{3}}{12}$ 【解析】由正弦定理可得 $\sin B\cos C=(2\sin A-\sin C)\cos B$, 得 $\sin B\cos C+\cos B\sin C=2\sin A\cos B$, 所以 $\sin(B+C)=2\sin A\cos B$, 因为 $\sin(B+C)=\sin(\pi-A)=\sin A$, $\sin A\neq0$, 所以 $\cos B=\frac{1}{2}$. 因为 $0<B<\pi$, 所以 $B=\frac{\pi}{3}$. 又 $b=2$, $a+c=3$, 所以 $a^2+c^2-2ac\cos B=b^2$. $\therefore(a+c)^2-3ac=4$, $\therefore ac=\frac{5}{3}$, $\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{5\sqrt{3}}{12}$.

16. $\frac{1849\pi}{16}$ 【解析】六棱柱笔筒的边长为 6 cm, 高 18 cm, 铁棒与底面六边形的最长对角线、对棱的部分长 h 构成直角三角形, 所以 $2\sqrt{85}=\sqrt{12^2+h^2}$, $\therefore h=14$, 所以容器内水面的高度为 14 cm. 设球的半径为 R, 则球被六棱柱体上面截得圆的半径为 $3\sqrt{3}$, 球心到截面圆的距离为 $R-4$, 则 $R^2=(R-4)^2+(3\sqrt{3})^2$, 解得 $R=\frac{43}{8}$, $\therefore$球的表面积为 $4\pi\times(\frac{43}{8})^2=\frac{1849\pi}{16}$ cm^2.

17. 【解析】(1)设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d,

则 $S_3=3a_1+\frac{3\times2}{2}d=15$, $\therefore a_1+d=5$, …… 2 分

$a_4=5+2d$, $a_{13}=5+11d$,

因 a_1, a_4, a_{13} 成等比数列,

所以 $(5+2d)^2=(5-d)(5+11d)$, ………… 4 分

化简的 $d^2=2d$, 则 $d=0$(舍)或 $d=2$, …… 6 分

故 $a_1=5-d=3$,

所以 $a_n=3+(n-1)\times2=2n+1$. ………… 7 分

(2)根据(1) $a_{2^n-n}=2(2^n-n)+1=2^{n+1}-(2n-1)$, …………………………………………… 8 分

所以 $T_n=(4+8+\cdots+2^{n+1})-[1+3+\cdots+(2n-1)]=\frac{4(1-2^n)}{1-2}-\frac{(1+2n-1)n}{2}=2^{n+2}-n^2-4$.

…………………………………………… 10 分

因为 $2^n-n>0$, 所以 $a_{2^n-n}=2(2^n-n)+1>0$,

所以 T_n 单调递增.

因为 $T_9<2020$, $T_{10}>2020$, $\therefore T_n$ 大于 2020 的最小自然数 n 为 10. ………………………… 12 分

18. 【解析】(1)由平面图可知, $AB\perp P'A$, $AB\perp AD$, $P'A\cap AD=A$,

所以 $AB\perp$平面 $P'AD$, 所以 $AB\perp P'D$. … 2 分

因为 E 为 $P'D$ 的中点, $P'A=AD$, $\therefore AE\perp P'D$.

…………………………………………… 4 分

因为 $AE\cap AB=A$, 所以 $P'D\perp$平面 ABE. ……

…………………………………………… 5 分

(2)因为 $P'-ABCD$ 的正视图与 $\triangle P'AD$ 全等,

所以 $S_{\triangle P'AD}=\frac{1}{2}\times1\times1\times\sin\angle P'AD=\frac{1}{2}\sin\angle P'AD=\frac{\sqrt{3}}{4}$, $\therefore\sin\angle P'AD=\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$\therefore\angle P'AD=120^\circ$或 60°. …………………… 8 分

由(1)可知, 平面 $ABCD\perp$平面 $P'AD$, 所以 P'在平面 $ABCD$ 内的射影应该落在直线 AD 上, 所以点 P'到平面 $ABCD$ 的距离为 $1\times\sin\angle P'AD=\frac{\sqrt{3}}{2}$, …………………………………………… 10 分

所以四棱锥 $P'-ABCD$ 的体积 $V_{P'-ABCD}=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{2}\times(\frac{1}{2}+1)\times1=\frac{\sqrt{3}}{8}$. ……………… 12 分

19.【解析】(1)填表如下：

	使用寿命不高于6年	使用寿命不低于7年	总计
A型	30	70	100
B型	50	50	100
总计	80	120	200

由列联表可知 $K^2=\dfrac{200(50\times70-30\times50)^2}{100\times100\times80\times120}\approx$

$8.33>6.635$， …………………………… 4分

故有99%的把握认为出租车的使用寿命年数与汽车车型有关. …………………………… 6分

(2)记事件 A_1，A_2 分别表示小李选择A型出租车和B型出租车时，3年内(含3年)换车.

由表知 $P(A_1)=\dfrac{10}{100}+\dfrac{20}{100}+\dfrac{45}{100}=0.75$， … 8分

$P(A_2)=\dfrac{15}{100}+\dfrac{35}{100}+\dfrac{40}{100}=0.90$，

$P(A_1)<P(A_2)$，故小李应选择A型出租车. …

…………………………………………… 12分

20.【解析】(1)设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$D(x_0,y_0)$，

联立方程 $\begin{cases}\dfrac{x_1^2}{a^2}+\dfrac{y_1^2}{b^2}=1\\ \dfrac{x_2^2}{a^2}+\dfrac{y_2^2}{b^2}=1\end{cases}$，

得 $\dfrac{(x_1-x_2)(x_1+x_2)}{a^2}+\dfrac{(y_1-y_2)(y_1+y_2)}{b^2}=0$，

所以 $k_{AB}\cdot k_{OD}=-\dfrac{b^2}{a^2}$，所以 $-\dfrac{b^2}{a^2}=-\dfrac{3}{4}$，

$\therefore\dfrac{b^2}{a^2}=\dfrac{3}{4}$， …………………………… 3分

又 $a^2-b^2=1$，解得 $a^2=4$，$b^2=3$，

故椭圆C的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$. …………… 4分

(2)根据题意，直线AB的方程为 $x=my+1$，

由方程组 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1\\ x=my+1\end{cases}$，消去x整理得 $(3m^2+4)y^2+6my-9=0$，

$\because\Delta=36m^2+36(3m^2+4)>0$，

$\therefore y_1+y_2=-\dfrac{6m}{3m^2+4}$，$y_1y_2=-\dfrac{9}{3m^2+4}$， … 6分

$\because$ 直线MA的斜率 $k_{AM}=\dfrac{y_1}{x_1+2}$，直线MB的斜率 $k_{BM}=\dfrac{y_2}{x_2+2}$， …………………………… 7分

$\because k_{MA}+k_{MB}=\dfrac{y_1}{x_1+2}+\dfrac{y_2}{x_2+2}$

$=\dfrac{y_1(x_2+2)+y_2(x_1+2)}{(x_1+2)(x_2+2)}$

$=\dfrac{y_1(my_2+3)+y_2(my_1+3)}{(my_1+3)(my_2+3)}$

$=\dfrac{2my_1y_2+3(y_1+y_2)}{m^2y_1y_2+3m(y_1+y_2)+9}$

$=\dfrac{2m\cdot\dfrac{-9}{3m^2+4}+3(-\dfrac{6m}{3m^2+4})}{m^2\cdot\dfrac{-9}{3m^2+4}+3m(-\dfrac{6m}{3m^2+4})+9}$

$=-m$， …………………………………… 10分

因为 $k_{AB}\cdot k_{OD}=\dfrac{1}{m}\cdot k_{OD}=-\dfrac{3}{4}$，$\therefore m=-\dfrac{4}{3}k_{OD}$

所以 $k_{MA}+k_{MB}=\dfrac{4}{3}k_{OD}$. ……………………… 12分

21.【解析】(1)因为函数 $f(x)=x\ln x$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，所以 $f'(x)=\ln x+1$. ………… 1分

令 $f'(x)<0$，得 $\ln x+1<0$，解得 $0<x<\dfrac{1}{e}$，

所以 $f(x)$ 的单调递减区间是 $(0,\dfrac{1}{e})$.

令 $f'(x)>0$，得 $\ln x+1>0$，解得 $x>\dfrac{1}{e}$，

所以 $f(x)$ 的单调递增区间是 $(\dfrac{1}{e},+\infty)$.

综上，$f(x)$ 的极小值为 $-\dfrac{1}{e}$，无极大值. …… 3分

(2)由 $g'(x)=k+\sin x$，得 $g'(-\dfrac{\pi}{2})=k-1=0$，

$\therefore k=1$，故 $g(x)=x-\cos x$，

$\because F(x)=x-\cos x-x\ln x$，$\therefore F'(x)=\sin x-\ln x$，

设 $h(x)=\sin x-\ln x$， ……………………… 4分

(ⅰ)当 $x\in(e,+\infty)$ 时，$\therefore h(x)=F'(x)\leqslant0$，

所以 $F(x)$ 单调递减. 又 $F(e)=-\cos e>0$，

$F(\dfrac{3}{2}\pi)=\dfrac{3}{2}\pi(1-\ln\dfrac{3}{2}\pi)<0$，从而 $F(x)$ 在 $(e,\dfrac{3\pi}{2})$ 上存在唯一零点. 也即在 $(e,+\infty)$ 上存在唯一零点. …………………………………… 6分

(ⅱ)当 $x\in(\dfrac{\pi}{2},e]$ 时，$h'(x)=\cos x-\dfrac{1}{x}<0$，

所以 $F'(x)$ 在 $(\dfrac{\pi}{2},e]$ 上单调递减，

因为 $F'(e)=\sin e-1<0$，$F'(\dfrac{\pi}{2})=1-\ln\dfrac{\pi}{2}>0$，

所以存在 $x_0\in(\dfrac{\pi}{2},e]$，$F'(x_0)=0$，且在 $(\dfrac{\pi}{2},x_0)$ 上

$F'(x)>0$，在$(x_0,\mathrm{e}]$上$F'(x)<0$，

所以$F(x_0)$为$F(x)$在$(\frac{\pi}{2},\mathrm{e}]$上的最大值，

又因为$F(\mathrm{e})=-\cos\mathrm{e}>0$，

$F(\frac{\pi}{2})=\frac{\pi}{2}(1-\ln\frac{\pi}{2})>0$，

所以$F(x)$在$(\frac{\pi}{2},\mathrm{e}]$上恒大于零，无零点． ……………………………………………… 8 分

(ⅲ)当$x\in(0,1)$时，$h'(x)=\cos x-\frac{1}{x}<0$，

所以$F'(x)$在$(0,1)$上单调递减． …………… 9 分

当$x\in[1,\frac{\pi}{2}]$时，$h'(x)=\cos x-\frac{1}{x}=\frac{x\cos x-1}{x}$，

设$t(x)=x\cos x-1$，

$\therefore t'(x)=\cos x-x\sin x\leqslant\cos x-\sin x<0$，

所以$t(x)$在$[1,\frac{\pi}{2}]$上单调递减，

所以$t(x)<t(1)=\cos1-1<0$，

即$h'(x)<0$． …………………………………… 10 分

$\therefore F'(x)$在$(0,\frac{\pi}{2}]$上单调递减，

因为$F'(\frac{\pi}{2})=1-\ln\frac{\pi}{2}>0$，

所以$F(x)$在$(0,\frac{\pi}{2}]$上单调递增，

因为$F(\frac{\pi}{2})=\frac{\pi}{2}(1-\ln\frac{\pi}{2})>0$，

$F(\frac{1}{\mathrm{e}})=\frac{2}{\mathrm{e}}-\cos\frac{1}{\mathrm{e}}<\frac{2}{\mathrm{e}}-\cos\frac{\pi}{6}=\frac{2}{\mathrm{e}}-\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{4-\sqrt{3}\mathrm{e}}{2\mathrm{e}}<0$，

所以$F(x)$在$(\frac{1}{\mathrm{e}},\frac{\pi}{2}]$上存在唯一零点，

即$F(x)$在$(0,\frac{\pi}{2}]$上存在唯一零点，

综上，$F(x)$有且仅有 2 个零点． …………… 12 分

22.【解析】(1)由$y=\frac{2(1-k^2)}{1+k^2}$，得$\frac{y}{2}=-1+\frac{2}{1+k^2}(y\neq-2)$，即$\frac{y}{2}+1=\frac{2}{1+k^2}$， …………………… 2 分

又$x+1=\frac{4k}{1+k^2}$，两式相除得$k=\frac{x+1}{y+2}$，代入$x+1=\frac{4k}{1+k^2}$，得$\dfrac{4\times\frac{x+1}{y+2}}{1+(\frac{x+1}{y+2})^2}=x+1$， …………… 4 分

整理得$(x+1)^2+y^2=4(y\neq-2)$，即为曲线C_1的普通方程． ………………………………………… 5 分

(2)设圆心$C_1(-1,0)$到直线l的距离为d，

则$|AB|=2\sqrt{4-d^2}=2\sqrt{3}$，$\therefore d=1$． ……… 7 分

$|PD|=\sqrt{|PC_1|^2-1}$，

当$|PC_1|$最小时，$|PD|$最小，因为$|PC_1|$的最小值为圆心C_1到直线C_2的距离，

所以$|PC_1|_{\min}=\frac{|-1+0-4|}{\sqrt{2}}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$， ……… 9 分

所以$|PD|_{\min}=\sqrt{\frac{25}{2}-1}=\frac{\sqrt{46}}{2}$． ………… 10 分

23.【解析】(1)$\because f(x)=\frac{1}{3}(x+1)^2\geqslant0$， ……… 1 分

$\therefore f(x)+|f(x)-9|=|f(x)|+|f(x)-9|\geqslant|f(x)-f(x)+9|=9$，……………………… 4 分

所以$M=9$． ………………………………… 5 分

(2)由(1)知，$(a+1)^2+(b+1)^2+(c+1)^2=27$． ……………………………………………… 6 分

因为$[(a+1)+(b+1)+(c+1)]^2$

$=(a+1)^2+(b+1)^2+(c+1)^2+2(a+1)(b+1)+2(b+1)(c+1)+2(a+1)(c+1)$

$\leqslant3[(a+1)^2+(b+1)^2+(c+1)^2]=81$， … 9 分

所以$(a+1)+(b+1)+(c+1)\leqslant9$，

故$a+b+c\leqslant6$． ……………………………… 10 分

关于我们

自主招生在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（http://www.zizzs.com/）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

关注后获取更多资料：

回复“**答题模板**”，即可获取《高中九科试卷的解题技巧和答题模版》

回复“**必背知识点**”,即可获取《高考考前必背知识点》