高三数学参考答案及评分标准

2020. 5

一、单项选择题(每小题 5 分,共 40 分)

1－4 CBCD　　5－8 DBBA

二、多项选择题(每小题 5 分,共 20 分)

9. BCD　10. BD　11. ACD　12. BD

三、填空题(每小题 5 分,共 20 分)

13. 20　14. 3　15. 36　16. $-4,(0,\frac{1}{4})$

四、解答题(本大题共 6 小题,共 70 分)

17. 解:(1)由正弦定理得:$b=\frac{a\cdot\sin B}{\sin A}=\frac{2\sqrt{3}\cdot\sin\frac{\pi}{4}}{\sin\frac{\pi}{3}}=2\sqrt{2}$. ………………………… 4 分

(2)因为△ABC 的内角和 $A+B+C=\pi$,$A=\frac{\pi}{3}$,所以 $0<B<\frac{2\pi}{3}$,

因为 $b=\frac{a}{\sin A}\sin B=4\sin B$, …………………………………………………………… 6 分

所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=4\sqrt{3}\sin B\sin(\frac{2\pi}{3}-B)=4\sqrt{3}\sin B(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos B+\frac{1}{2}\sin B)$

$=6\sin B\cos B+2\sqrt{3}\sin^2B=2\sqrt{3}\sin(2B-\frac{\pi}{6})+\sqrt{3}$. …………………………………… 8 分

因为 $0<B<\frac{2\pi}{3}$,所以 $-\frac{\pi}{6}<2B-\frac{\pi}{6}<\frac{7\pi}{6}$,

当 $2B-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$ 即 $B=\frac{\pi}{3}$ 时,

△ABC 面积取得最大值 $3\sqrt{3}$. ………………………………………………………… 10 分

18. 解:(1)令 $n=1$,得 $a_1b_1=3+(2-3)2=1$,所以 $b_1=1$, ………………………… 1 分

令 $n=2$,得 $a_1b_1+a_2b_2=7$,所以 $a_2b_2=6$,又 $b_2=3$,所以 $a_2=2$, …………………… 3 分

设数列$\{a_n\}$的公比为 q,则 $q=\frac{a_2}{a_1}=2$,

所以 $a_n=2^{n-1}$; ………………………………………………………………………………… 5 分

(2)当 $n\geq2$ 时,$a_1b_1+a_2b_2+\cdots a_{n-1}b_{n-1}=3+(2n-5)2^{n-1}$,①

又 $a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+\cdots+a_nb_n=3+(2n-3)2^n$,②

②－①得 $a_nb_n=3+(2n-3)2^n-[3+(2n-5)2^{n-1}]=(2n-1)2^{n-1}$, ………… 8 分

得 $b_n=2n-1$,$n=1$ 时也成立,

所以 $b_n=2n-1$, ………………………………………………………………………… 10 分

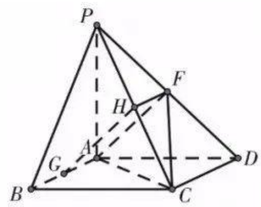
$\frac{1}{b_nb_{n+1}}=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1})$,

所以 $T_n=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{3})+\frac{1}{2}(\frac{1}{3}-\frac{1}{5})+\cdots+\frac{1}{2}(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1})$

$=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1})=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2n+1})=\frac{n}{2n+1}$. ……… 12 分

19. 解：(1)在线段 AB 上存在中点 G，使得 $AF//$ 平面 PCG

…………………………………………………… 1 分



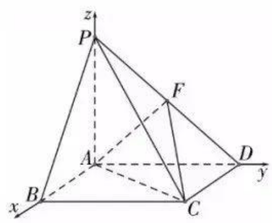
证明如下：设 PC 的中点为 H，连结 FH，

易证四边形 $AGHF$ 为平行四边形，

则 $AF//GH$，又 $GH\subset$ 平面 PGC，$AF\not\subset$ 平面 PGC，

所以 $AF//$ 平面 PGC. ………………………………… 4 分

(2)选择①：



因为 $PA\perp$ 平面 $ABCD$

所以 $PA\perp BC$，由题意可知，AB、AD、AP 彼此两两垂直，

故以 AB、AD、AP 分别为 x、y、z 轴建立空间直角坐标系，

…………………………………………………… 5 分

因为 $PA=AB=2$

则 $A(0,0,0)$，$B(2,0,0)$，$C(2,2,0)$，$D(0,2,0)$，$F(0,1,1)$，$P(0,0,2)$，

所以 $\overrightarrow{AF}=(0,1,1)$，$\overrightarrow{CF}=(-2,-1,1)$

设平面 FAC 的法向量为 $\vec{u}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\vec{u}\cdot\overrightarrow{AF}=0\\ \vec{u}\cdot\overrightarrow{CF}=0\end{cases}$ 求得 $\vec{u}=(-1,1,-1)$ …… 9 分

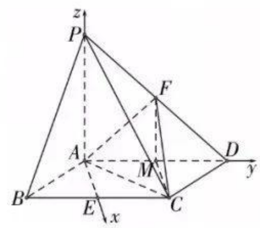
平面 ACD 的法向量为 $\vec{v}=(0,0,2)$

设二面角 $F-AC-D$ 的平面角为 θ，则 $\cos\theta=\frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}||\vec{v}|}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

即二面角 $F-AC-D$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$； ……………………………………………… 12 分

(若用其它解法，正确的同样给分)

选择②



因为 $PA\perp$ 平面 $ABCD$，取 BC 中点 E，连结 AE，取 AD 的中点 M，连接 FM，CM，则 $FM//PA$，且 $FM=1$，

所以 $FM\perp$ 平面 $ABCD$，FC 与平面 $ABCD$ 所成的角为 $\angle FCM$，故 $\angle FCM=\frac{\pi}{6}$，

在直角三角形 FCM 中，$CM=\sqrt{3}$，又因为 $CM=AE$，故 $AE^2+BE^2=AB^2$，

所以 $BC\perp AE$，所以 AE、AD、AP 彼此两两垂直，

故以 AE、AD、AP 分别为 x、y、z 轴建立空间直角坐标系， ……………………………… 6 分

因为 $PA=AB=2$，

所以 $A(0,0,0)$，$B(\sqrt{3},-1,0)$，$C(\sqrt{3},1,0)$，$D(0,2,0)$，$E(\sqrt{3},0,0)$，$F(0,1,1)$，$P(0,0,2)$

所以 $\overrightarrow{AF}=(0,1,1)$，$\overrightarrow{CF}=(\sqrt{3},0,1)$

设平面 FAC 的法向量为 $\vec{u}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\vec{u}\cdot\overrightarrow{AF}=0\\ \vec{u}\cdot\overrightarrow{CF}=0\end{cases}$ 求得 $\vec{u}=(\sqrt{3},-3,3)$ …… 9 分

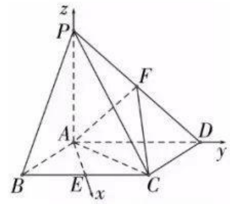
平面 ACD 的法向量为 $\overrightarrow{v}=(0,0,2)$

设二面角 $F-AC-D$ 的平面角为 θ，则 $\cos\theta=\dfrac{|\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}|}{|\overrightarrow{u}||\overrightarrow{v}|}=\dfrac{\sqrt{21}}{7}$.

即二面角 $F-AC-D$ 的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{21}}{7}$. ………………………………………… 12 分

（若用其它解法，正确的同样给分）

选择③：



因为 $PA\perp$ 平面 $ABCD$

所以 $PA\perp BC$，取 BC 中点 E，连结 AE，

因为底面 $ABCD$ 是菱形

$\angle ABC=60°$，所以 $\triangle ABC$ 是正三角形，

又 E 是 BC 的中点，所以 $BC\perp AE$，

所以 AE、AD、AP 彼此两两垂直，

故以 AE、AD、AP 分别为 x、y、z 轴建立空间直角坐标系， ………………………… 6 分

因为 $PA=AB=2$，

所以 $A(0,0,0)$，$B(\sqrt{3},-1,0)$，$C(\sqrt{3},1,0)$，$D(0,2,0)$，$E(\sqrt{3},0,0)$，$F(0,1,1)$，$P(0,0,2)$

所以 $\overrightarrow{AF}=(0,1,1)$，$\overrightarrow{CF}=(-\sqrt{3},0,1)$

设平面 FAC 的法向量为 $\overrightarrow{u}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{AF}=0\\ \overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{CF}=0\end{cases}$ 求得 $\overrightarrow{u}=(\sqrt{3},-3,3)$ …… 9 分

平面 ACD 的法向量为 $\overrightarrow{v}(0,0,2)$

设二面角 $F-AC-D$ 的平面角为 θ，则 $\cos\theta=\dfrac{|\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}|}{|\overrightarrow{u}|\cdot|\overrightarrow{v}|}=\dfrac{\sqrt{21}}{7}$，

即二面角 $F-AC-D$ 的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{21}}{7}$. ………………………………………… 12 分

（若用其它解法，正确的同样给分）

20. 解：(1) 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，

$f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{a}{x}=\dfrac{ax-1}{x^2}$， ………………………………………………… 1 分

当 $a\leq0$ 时，$f'(x)<0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减； ……………………… 2 分

当 $a>0$ 时，由于 $f'(x)>0$ 得 $x>\dfrac{1}{a}$，由 $f'(x)<0$ 得 $0<x<\dfrac{1}{a}$，

所以 $f(x)$ 在 $(0,\dfrac{1}{a})$ 上单调递减，在 $(\dfrac{1}{a},+\infty)$ 上单调递增， ……………………… 4 分

综上可知：$a\leq0$ 时，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减；

$a>0$ 时，$f(x)$ 在 $(0,\dfrac{1}{a})$ 上单调递减，在 $(\dfrac{1}{a},+\infty)$ 上单调递增. ………………… 5 分

(2) 因为 $x>0$，所以不等式等价于 $e^x-ex+1>\dfrac{e\ln x}{x}$， ……………………………… 6 分

设 $F(x)=e^x-ex+1$，$F'(x)=e^x-e$，所以 $x\in(1,+\infty)$ 时 $F'(x)>0$，$F(x)$ 单调递增，$x\in(0,1)$ 时 $F'(x)<0$，$F(x)$ 单调递减，所以 $F(x)_{\min}=F(1)=1$； …………………… 8 分

设 $G(x)=\frac{e\ln x}{x}$，$G'(x)=\frac{e(1-\ln x)}{x^2}$，所以 $x\in(0,e)$ 时 $G'(x)>0$，$G(x)$ 单调递增，$x\in(e,+\infty)$ 时 $G'(x)<0$，$G(x)$ 单调递减，所以 $G(x)_{\max}=G(e)=1$. ………………… 10 分

虽然 $F(x)$ 的最小值等于 $G(x)$ 的最大值，但 $1\neq e$，所以 $F(x)>G(x)$，即 $e^x-ex+1>\frac{e\ln x}{x}$，故原不等式成立. ………………………………………… 12 分

21. 解：(1) 选择回归方程 $y=ce^{dx}$，适宜预测未来几年我国区块链企业总数量. …… ………………………………………… 2 分

(2) 对 $y=ce^{dx}$ 两边取自然对数，得 $\ln y=\ln c+dx$；

令 $z=\ln y$，$a=\ln c$，$b=d$，得 $z=a+bx$. ………………………………… 3 分

由于 $\sum\limits_{i=1}^{5}x_i=15$，$\bar{x}=\frac{1}{5}\sum\limits_{i=1}^{5}x_i=3$，$\bar{z}=\frac{1}{5}\sum\limits_{i=1}^{5}Z_i=2.196$，

因为 $\hat{b}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})(z_i-\bar{z})}{\sum\limits_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})^2}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{5}x_iz_i-5\bar{x}\cdot\bar{z}}{\sum\limits_{i=1}^{5}x_i^2-5\bar{x}^2}=\frac{40.457-5\times3\times2.196}{55-5\times3^2}\approx0.752$，

………………………………………… 5 分

则 $\hat{a}=\bar{z}-\hat{b}\bar{x}=2.196-0.752\times3=-0.060$.

所以，z 关于 x 的回归方程为 $\hat{z}=0.752x-0.060$；

所以，y 关于 x 的回归方程为 $\hat{y}=e^{0.752x-0.060}$. ……………………………… 7 分

(3) 对于首场比赛的选择有以下三种情况：A——甲与乙先赛；B——甲与丙先赛；C——丙与乙先赛. 由于在每场比赛中，甲胜乙的概率为 $\frac{1}{3}$，甲胜丙的概率为 $\frac{3}{5}$，乙胜丙的概率为 $\frac{1}{2}$，则甲公司获胜的概率分别是：

$P(A)=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5}+\frac{1}{3}\cdot(1-\frac{3}{5})\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+(1-\frac{1}{3})\cdot(1-\frac{1}{2})\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{3}=\frac{13}{45}$， …… ………………………………………… 9 分

$P(B)=\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{3}+\frac{3}{5}\cdot(1-\frac{1}{3})\cdot(1-\frac{1}{2})\cdot\frac{3}{5}+(1-\frac{3}{5})\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5}=\frac{9}{25}$……… ………………………………………… 10 分

$P(C)=(1-\frac{1}{2})\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5}=\frac{1}{5}$ ……………………………… 11 分

由于 $\frac{9}{25}>\frac{13}{45}>\frac{1}{5}$，

所以甲与丙两公司进行首场比赛时，甲公司获得“优胜公司”的概率最大. …… 12 分

22. 解：(1) 设 $F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$，

$\overrightarrow{PF_1}=(-c-2,-1)$，$\overrightarrow{PF_2}=(c-2,-1)$，

$\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=-c^2+4+1=-1$，所以 $c=\sqrt{6}$， ……………………………… 1 分

又 $P(2,1)$ 在椭圆上，故 $\frac{4}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1$，结合 $a^2=b^2+6$，

解得 $a^2=8,b^2=2$，故所求方程为：$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1$，…………………………………… 3 分

(2)(ⅰ)由于 $k_{OP}=\frac{1}{2}$，

设 l_2 方程为 $y=\frac{1}{2}x+t$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

由 $\begin{cases} y=\frac{1}{2}x+t \\ \frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1 \end{cases}$ 消 y 整理得 $x^2+2tx+2t^2-4=0$，………………………………… 4 分

$$\begin{cases} x_1+x_2=-2t, \\ x_1x_2=2t^2-4, \\ \triangle=-4(t^2-4)>0 \Rightarrow t^2<4. \end{cases}$$

则 $|AB|=\sqrt{1+\frac{1}{4}}\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$

$=\frac{\sqrt{5}}{2}\sqrt{4t^2-4(2t^2-4)}=\frac{\sqrt{5}}{2}\sqrt{16-4t^2}$

$=\sqrt{5}\sqrt{4-t^2}$，……………………………………………………………………………… 5 分

又点 P 到 l_2 的距离 $d=\frac{|t|}{\sqrt{1+(\frac{1}{2})^2}}=\frac{2|t|}{\sqrt{5}}$，

所以 $S_{\triangle PAB}=\frac{1}{2}\sqrt{5}\sqrt{4-t^2}\cdot\frac{2|t|}{\sqrt{5}}$

$=\sqrt{(4-t^2)t^2}$

$\leqslant\frac{t^2+(4-t^2)}{2}=2.$

此时 $4-t^2=t^2$，$2t^2=4$，$t^2=2$，

故直线 AB 的方程为：$y=\frac{1}{2}x\pm\sqrt{2}$. ……………………………………………… 7 分

(ⅱ)要证结论成立，只须证明：$\frac{|PA|}{|MA|}=\frac{|PB|}{|MB|}$，

由角平分线性质即证：直线 $x=2$ 为 $\angle APB$ 的平分线，

转化成证明：$k_{PA}+k_{PB}=0$.

因为 $k_{PA}+k_{PB}=\frac{y_1-1}{x_1-2}+\frac{y_2-1}{x_2-2}=\frac{[(\frac{1}{2}x_1+t)-1](x_2-2)+[(\frac{1}{2}x_2+t)-1](x_1-2)}{(x_1-2)(x_2-2)}$

$=\frac{x_1x_2+(t-2)(x_1+x_2)-4(t-1)}{(x_1-2)(x_2-2)}$

$=\frac{2t^2-4-2t(t-2)-4(t-1)}{(x_1-2)(x_2-2)}=\frac{-4+4t-4t+4}{(x_1-2)(x_2-2)}=0$

因此结论成立. ………………………………………………………………………… 9 分

又 l_1 与 C 有一个公共点,即 l_1 为椭圆的切线,

由 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1$ 得 $y^2=2-\frac{1}{4}x^2$.

令 $x>0,y>0$,则 $y=\sqrt{2-\frac{1}{4}x^2}$,$y'=\frac{-\frac{1}{2}x}{2\sqrt{2-\frac{1}{4}x^2}}=\frac{-x}{\sqrt{32-4x^2}}$,

所以 $y'|_{x=2}=-\frac{1}{2}$,

所以 $k_{l_1}=-\frac{1}{2}$, ………………………………………………………………………… 10 分

故此:所研究的 4 条直线的斜率分别为 $-\frac{1}{2},\frac{1}{2},k_{PA},-k_{PA}$,若这四个数成等比数列,且其公比记为 q,则应有 $q=-1$ 或 $q^2=-1$,或 $q^3=-1$.

因为 $q^2=-1$ 不成立,所以 $q=-1$,而当 $q=-1$ 时,$k_{PA}=\frac{1}{2}$,$k_{PB}=-\frac{1}{2}$,

此时直线 PB 与 l_1 重合,不合题意,

故 l_1,l_2,PA,PB 的斜率无论怎样排序都不可能构成等比数列. ………………… 12 分

关于我们

自主招生在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（http://www.zizzs.com/）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

关注后获取更多资料：

回复“**答题模板**”，即可获取《高中九科试卷的解题技巧和答题模版》

回复“**必背知识点**”,即可获取《高考考前必背知识点》