中学生标准学术能力诊断性测试 2020 年 1 月测试

理科数学试卷（一卷）

本试卷共 150 分，考试时间 120 分钟。

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．若集合 $A=\{x|-1<x<2\}, B=\{-2,0,1,2\}$，则 $A\cap B=$

A．$\varnothing$　　B．$\{0,1\}$　　C．$\{0,1,2\}$　　D．$\{-2,0,1,2\}$

2．若 $(2+i)z=5$，则 z 的虚部为

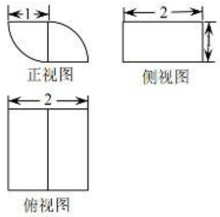
A．-1　　B．1　　C．$-i$　　D．i

3．已知双曲线 $\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(b>0)$ 的两条渐近线互相垂直，则 $b=$

A．1　　B．$\sqrt{2}$　　C．$\sqrt{3}$　　D．2

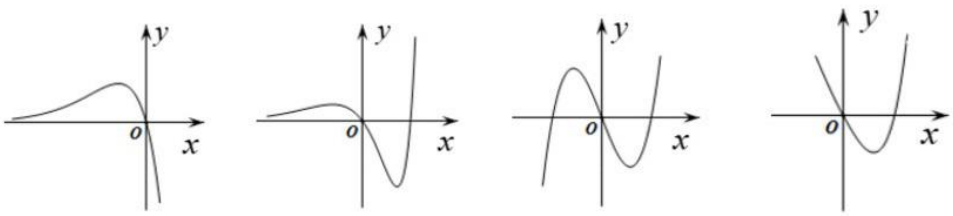
4．由两个 $\dfrac{1}{4}$ 圆柱组合而成的几何体的三视图如图所示，则该几何体的体积为

A．$\dfrac{\pi}{3}$　　B．$\dfrac{\pi}{2}$　　C．π　　D．2π



（第 4 题图）

5．函数 $f(x)=(x^2-2x)e^x$ 的图象可能是



A　　B　　C　　D

6．已知关于 x 的不等式 $ax^2-2x+3a<0$ 在 $(0,2]$ 上有解，则实数 a 的取值范围是

A．$\left(-\infty,\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$　　B．$\left(-\infty,\dfrac{4}{7}\right)$　　C．$\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3},+\infty\right)$　　D．$\left(\dfrac{4}{7},+\infty\right)$

7．已知 a,b 为实数，则 $0<b<a<1$ 是 $\log_a b>\log_b a$ 的

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充要条件　　　　D．既不充分也不必要条件

8．已知随机变量ξ，η的分布列如下表所示．则

ξ	1	2	3
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

η	1	2	3
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$

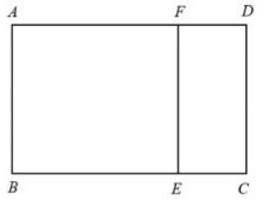
A．$E\xi < E\eta, D\xi < D\eta$　　　　B．$E\xi < E\eta, D\xi > D\eta$

C．$E\xi < E\eta, D\xi = D\eta$　　　　D．$E\xi = E\eta, D\xi = D\eta$

9．在$\triangle ABC$中，若$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}=2\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}$，则$\dfrac{|\overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{BC}|}=$

A．1　　B．$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　C．$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　D．$\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

10．在矩形$ABCD$中，已知$AB=3, AD=4$，E是边BC上的点，$EC=1$，$EF//CD$，将平面$EFDC$绕EF旋转90°后记为平面α，直线AB绕AE旋转一周，则旋转过程中直线AB与平面α相交形成的点的轨迹是



（第 10 题图）

A．圆　　　　B．双曲线

C．椭圆　　　　D．抛物线

11．已知函数$f(x)=(\ln x-1)(x-2)^i-m(i=1,2)$，$e$是自然对数的底数，存在$m\in\mathbf{R}$

A．当$i=1$时，$f(x)$零点个数可能有 3 个　　B．当$i=1$时，$f(x)$零点个数可能有 4 个

C．当$i=2$时，$f(x)$零点个数可能有 3 个　　D．当$i=2$时，$f(x)$零点个数可能有 4 个

12．已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且满足$a_n(2S_n-a_n)=1$，则下列结论中

①数列$\{S_n^2\}$是等差数列；　　②$a_n<2\sqrt{n}$；　　③$a_na_{n+1}<1$

A．仅有①②正确　　B．仅有①③正确　　C．仅有②③正确　　D．①②③均正确

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．

13．1742 年 6 月 7 日，哥德巴赫在给大数学家欧拉的信中提出：任一大于 2 的偶数都可写成两个质数的和．这就是著名的“哥德巴赫猜想”，可简记为“1+1”．1966 年，我国数学家陈景润证明了

"1+2"，获得了该研究的世界最优成果，若在不超过 30 的所有质数中，随机选取两个不同的数，则两数之和不超过 30 的概率是__________.

14. 已知$\triangle ABC$的面积等于1，若$BC=1$，则当这个三角形的三条高的乘积取最大值时，$\sin A=$______.

15. 已知F是椭圆C:$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的一个焦点，$P$是$C$上的任意一点，则$|FP|$称为椭圆$C$的焦半径．设$C$的左顶点与上顶点分别为$A$、$B$，若存在以$A$为圆心，$|FP|$为半径长的圆经过点$B$，则椭圆$C$的离心率的最小值为____________.

16. 设函数$f(x)=|x^3-6x^2+ax+b|$，若对任意的实数a和b，总存在$x_0\in[0,3]$，使得$f(x_0)\geq m$，则实数m的最大值为____________.

三、解答题：共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答．第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答．

（一）必考题：60 分．

17.（12 分）已知角α的顶点与原点O重合，始边与x轴的非负半轴重合，终边经过点$P(-1,\sqrt{3})$．

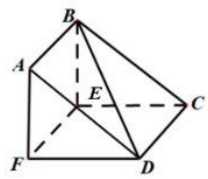
（1）求$\cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{2}\right)$的值；

（2）求函数$f(x)=\sin^2(x+\alpha)-\cos^2(x-\alpha)(x\in\mathbf{R})$的最小正周期与单调递增区间．

18.（12 分）如图，多面体$ABCDFE$中，四边形$ABEF$和四边形$CDFE$是两个全等的菱形，$AB=2$，$\angle BAF=\angle ECD=60^\circ$．

（1）求证：$BD\perp DC$；

（2）如果二面角$B-EF-D$的平面角为60°，求直线BD与平面BCE所成角的正弦值．



（第 18 题图）

19.（12 分）已知等比数列$\{a_n\}$的公比$q>1$，且$a_1+a_3+a_5=42$，a_3+9是a_1,a_5的等差中项．数列$\{b_n\}$的通项公式$b_n=\dfrac{2^n}{\sqrt{a_n-1}+\sqrt{a_{n+1}-1}}$，$n\in N^*$．

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

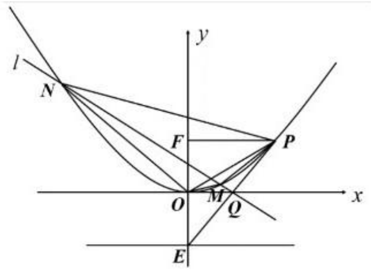
（2）证明：$b_1+b_2+\cdots+b_n<\sqrt{2^{n+1}-1}$，$n\in N^*$．

20.（12 分）已知抛物线$C:x^2=2py(p>0)$，焦点为F，准线与y轴交于点E．若点P在C上，横

坐标为 2，且满足：$|PE|=\sqrt{2}|PF|$.

（1）求抛物线C的方程；

（2）若直线PE交x轴于点Q，过点Q做直线l，与抛物线C有两个交点M,N(其中，点M在第一象限)．若$\overrightarrow{QM}=\lambda\overrightarrow{MN}$，当$\lambda\in(1,2)$时，求$\dfrac{S_{\triangle OMP}}{S_{\triangle ONP}}$的取值范围．



（第 20 题图）

21．（12 分）已知函数$f(x)=(x+1)(e^x-1)$．

（1）求$f(x)$在点$(-1,f(-1))$处的切线方程；

（2）若方程$f(x)=b$有两个实数根x_1,x_2，且$x_1<x_2$，证明：$x_2-x_1\le 1+\dfrac{b+e+1}{3e-1}+\dfrac{eb}{e-1}$．

（二）选考题：共 10 分．请考生在第 22,23 题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题计分．作答时请写清题号．

22．[选修 4—4：极坐标与参数方程]（10 分）

（1）以极坐标系Ox的极点O为原点，极轴x为x轴的正半轴建立平面直角坐标系xOy，并在两种坐标系中取相同的长度单位，把极坐标方程$\sin\theta+\rho^2\cos\theta=2$化成直角坐标方程．

（2）在直角坐标系xOy中，直线l：$\begin{cases}x=-2+t\cdot\cos\dfrac{3}{4}\pi\\ y=-1+t\cdot\sin\dfrac{3}{4}\pi\end{cases}$（$t$为参数），曲线$C$：$\begin{cases}x=2\cos\theta\\ y=a\sin\theta\end{cases}$（$\theta$为参数），其中$a>0$．若曲线$C$上所有点均在直线$l$的右上方，求$a$的取值范围．

23．[选修 4—5：不等式选讲]（10 分）

已知正数x,y,z满足$x+y+z=1$．

（1）求证：$\dfrac{x^2}{2y+3z}+\dfrac{y^2}{2z+3x}+\dfrac{z^2}{2x+3y}\ge\dfrac{1}{5}$；　　（2）求$16^x+16^y+16^{z^2}$的最小值．

和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国自主招生、综合评价领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

识别二维码，快速关注