姓名________ 座位号______________________________

(在此卷上答题无效)

数　学(理科)

本试卷共4页,23题(含选考题)。全卷满分150分,考试时间120分钟。

考生注意事项:

1. 答题前,先将自己的姓名、准考证号填写在试卷和答题卡上,并将准考证号条形码粘贴在答题卡上的指定位置。

2. 选择题的作答:每小题选出答案后,用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。

3. 非选择题的作答:用黑色签字笔直接答在答题卡上对应的答题区域内。写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。

4. 选考题的作答:先把所选题目的题号在答题卡上指定的位置用2B铅笔涂黑。答案写在答题卡上对应的答题区域内,写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。

5. 考试结束后,请将本试卷和答题卡一并上交。

一、选择题:本题共12小题,每小题5分,共60分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

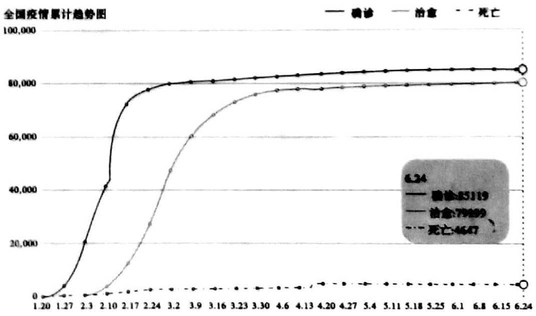
1. 函数 $y=\sqrt{-x^2+2x+3}$ 定义域和值域分别为 M、N,则 $M\cap N=$

A. $[-1,3]$　　B. $[-1,4]$　　C. $[0,3]$　　D. $[0,2]$

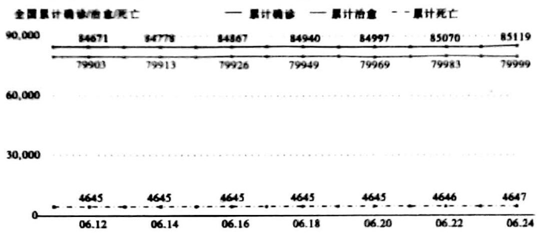
2. 复数 $z=a+bi(a,b\in\mathbf{R})$ 满足 $(1-2i)z=1+2i$,则 $a-b=$

A. $-\frac{1}{5}$　　B. $\frac{1}{5}$　　C. $-\frac{7}{5}$　　D. $\frac{7}{5}$

3. 下面两个图是2020年6月25日由国家卫健委发布的全国疫情累计趋势图,每图下面横向标注日期,纵向标注累计数量。现存确诊为存量数据,计算方法为:累计确诊数-累计死亡数-累计治愈数.



图一



图二

则下列对新冠肺炎叙述错误的是

A. 自1月20日以来一个月内,全国累计确诊病例属于快速增长时期

B. 自4月份以来,全国累计确诊病例增速缓慢,疫情扩散势头基本控制

C. 自6月16日至24日以来,全国每日现存确诊病例平缓增加

D. 自6月16日至24日以来,全国每日现存确诊病例逐步减少

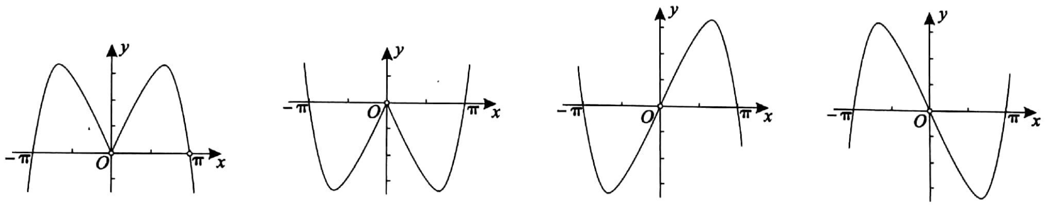
4. 已知 $a=0.3^{-0.2}$,$b=\log_{0.2}0.3$,$c=\log_{0.3}2$,则

A. $a>b>c$　　B. $a>c>b$　　C. $b>c>a$　　D. $c>b>a$

5. 疫情期间部分中小学居家上网学习，某市教育局为了解学生线上学习情况，准备从10所学校（其中6所中学4所小学）随机选出3所进行调研，其中 M 中学与 N 小学同时被选中的概率为

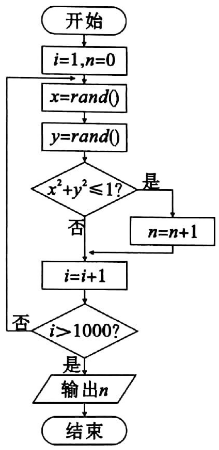
A. $\frac{1}{5}$　　B. $\frac{1}{8}$　　C. $\frac{1}{15}$　　D. $\frac{3}{20}$

6. 函数 $f(x)=\frac{\sin x\cdot(e^x-e^{-x})}{x}$ 的部分图象大致为



A.　　B.　　C.　　D.

7. 祖冲之是中国古代数学家、天文学家，他将圆周率推算到小数点后第七位。利用随机模拟的方法也可以估计圆周率的值，如图程序框图中 $rand(\ )$ 表示产生区间 $[0,1]$ 上的随机数，则由此可估计 π 的近似值为



A. $0.001n$　　B. $0.002n$　　C. $0.003n$　　D. $0.004n$

8. 已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的右顶点为 P，任意一条平行于 x 轴的直线交 C 于 A,B 两点，总有 $PA\perp PB$，则双曲线 C 的离心率为

A. $\sqrt{2}$　　B. $\sqrt{3}$　　C. $\frac{\sqrt{6}}{2}$　　D. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

9. 从一张圆形铁板上剪下一个扇形，将其制成一个无底圆锥容器，当容器体积最大时，该扇形的圆心角是

A. $\frac{2}{3}\pi$　　B. π　　C. $\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi$　　D. $\frac{2\sqrt{6}}{3}\pi$

10. 数列 $\{a_n\}$ 满足：$a_1=1,a_{m+n}=a_m+a_n+mn(m,n\in\mathbf{N}^*)$，若数列 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 的前 n 项和 $S_n\geqslant\frac{7}{4}$，则 n 最小为

A. 6　　B. 7　　C. 8　　D. 9

11. 已知函数 $f(x)=2\cos x-\sin 2x$，则下列结论正确的是

A. $f(x)$ 的最小正周期为 π　　B. $f(x)$ 的最大值为 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

C. $f(x)$ 的图象关于 $(\pi,0)$ 对称　　D. $f(x)$ 的图象关于 $x=\frac{\pi}{2}$ 对称

12. 在棱长为1的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，M,N 分别为棱 AB,C_1D_1 的中点. 平面 α 过 B_1,M 两点，且 $BN/\!/\alpha$. 设平面 α 截正方体所得截面面积为 S，且将正方体分成两部分的体积比为 $V_1:V_2$，有如下结论：①$S=\frac{3}{4}$，②$S=\frac{9}{8}$，③$V_1:V_2=1:3$，④$V_1:V_2=7:17$，则下列结论正确的是

A. ①③　　B. ①④　　C. ②③　　D. ②④

二、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

13. 曲线 $y=x+\cos x$ 在 $x=0$ 处的切线方程为__________.

14. 已知单位向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}|$，则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为__________.

15. 由数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的公共项组成的数列记为 $\{c_n\}$，已知 $a_n=3n-2,b_n=2^n$，若 $\{c_n\}$ 为递增数列，且 $c_5=b_m=a_t$，则 $m+t=$__________.

16. 已知抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的焦点为 F，准线为 l，$\odot C:(x-a)^2+(y-b)^2=16$ 过点 F 且与 l 相切，x 轴被 $\odot C$ 所截得的弦长为4，则 $a=$________.

三. 解答题：共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第17-21题为必考题，每个试题考生都必须作答。第22，23题为选考题，考生根据要求作答。

(一)必考题：共60分。

17. (12分)

在 $\triangle ABC$ 中，角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，$A=\dfrac{\pi}{4}$，$5a-3c=5b\cos C$.

(Ⅰ)求 $\cos C$；

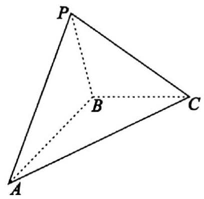
(Ⅱ)若边 AC 上中线 $BD=\sqrt{29}$，求 $\triangle ABC$ 的周长.

18. (12分)

如图，在三棱锥 $P-ABC$ 中，$AB\perp BC$，$PA\perp PB$，侧面 $PAB\perp$ 底面 ABC.

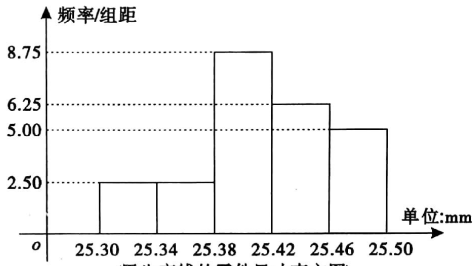
(1)求证：$\triangle PAC$ 是直角三角形；

(2)若 $AB=2PB=2BC$，求二面角 $P-AC-B$ 的余弦值.

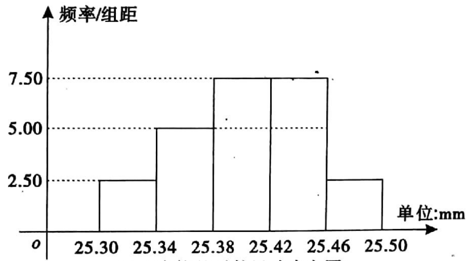


19. (12分)

已知某工厂有甲乙两条互不影响的生产线，同时生产一种内径为25.40mm的零件. 为了对它们生产质量进行检测，分别从生产的零件中随机抽取部分零件绘成频率分布直方图如下：



(甲生产线的零件尺寸直方图)



(乙生产线的零件尺寸直方图)

(1)从直方图中数据均值说明哪条生产线加工零件精确度更高？(同一组中的数据用该组区间的中点值为代表)

(2)记加工的零件内径尺寸落在 $[25.38,25.42)$ 的零件为一等品，零件内径尺寸落在 $[25.42,25.50]$ 的为二等品，零件内径尺寸落在 $[25.30,25.38)$ 的为三等品. 每个零件一等品、二等品和三等品的利润分别为为200元、100元和50元.

(ⅰ)从两条生产线生产的零件中分别取一个零件，求甲生产线上零件精度等级高于乙生产线上零件等级的概率；

(ⅱ)现有10000个零件需要加工，其中甲生产线加工 n 个乙生产线加工 $10000-n$ 个. 以工厂利润的期望为决策依据，在 $n=5000$ 和 $n=6000$ 之中选其一，应选哪种方案使工厂的利润最大？

20. (12 分)

在$\triangle PAB$中,已知$A(-2,0)$,$B(2,0)$,直线PA与PB的斜率之积为$-\frac{3}{4}$,记动点P的轨迹为曲线C.

(1)求曲线C的方程;

(2)设Q为曲线C上一点,直线AP与BQ交点的横坐标为4,求证:直线PQ过定点.

21. (12 分)

已知函数$f(x)=mx+\ln x(m\in\mathbf{R})$.

(1)讨论$f(x)$的单调性;

(2)若$f(x)\leqslant xe^{x}-1$,求实数m的取值范围.

(二)选考题:共10分。请考生在第22、23题中任选一题做答。如果多做,则按所做的第一题计分。

22.**【选修4-4:坐标系与参数方程】**(10分)

在平面直角坐标系xOy中,直线l过定点$P(1,0)$且倾斜角为α. 以O为极点,x轴的正半轴为极轴,建立极坐标系Ox,曲线C的极坐标方程为$\rho^{2}(1+3\sin^{2}\theta)=4$.

(1)求曲线C的直角坐标方程;

(2)已知直线l交曲线C于A,B两点,且$|PA||PB|=\frac{12}{13}$,求l的参数方程.

23.**【选修4-5:不等式选讲】**(10分)

已知不等式$|x-1|+|x-2|<3$的解集为M.

(1)求M;

(2)若$a,b,c\in M$,且$a+b+c=3$,求证:$\frac{a}{bc}+\frac{b}{ac}+\frac{c}{ab}\geqslant\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geqslant 3$.

2021 届高三第一次联考

理数参考答案

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	D	C	D	A	C	C	D	A	D	B	B	D

1. 【解析】由 $-x^2+2x+3\geq 0$ 解得 $-1\leq x\leq 3$，故 $M=\left[-1,3\right]$；由 $y=\sqrt{-\left(x-1\right)^2+4}\in\left[0,2\right]$，所以 $N=\left[0,2\right]$.故 $M\bigcap N=\left[0,2\right]$,选 D。

2.【解析】由已知 $a+bi=\dfrac{1+2i}{1-2i}=\dfrac{-3+4i}{5}$，$a=-\dfrac{3}{5},b=\dfrac{4}{5}$，则 $a-b=-\dfrac{7}{5}$，故选 C.

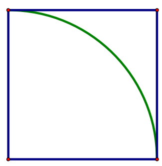
3.【解析】由图一可知 A,B 均正确。由图二数据计算得 16 的现存确诊病例为 $84867-79926-4645=296$，同理可计算 18、20、22、24 日现存确诊分别为 346，383，441，473，故应选 D。

4. 【解析】由已知 $a=0.3^{-0.2}>0.3^0=1$，$b=\log_{0.2}0.3<\log_{0.2}0.2=1$，$b=\log_{0.2}0.3>\log_{0.2}1=0$，$0<b<1$，$c=\log_{0.3}2<\log_{0.3}1=0$，故 $a>b>c$，选 A。

5.【解析】基本事件共 $C_{10}^3=120$，其中 A 中学与 B 小学被选中包含 $C_5^1+C_3^1=8$ 个基本事件，故所求概率为 $P=\dfrac{8}{120}=\dfrac{1}{15}$，故选 C。

6.【解析】因为 $f\left(-x\right)=-f\left(x\right)$，故 $f\left(x\right)$ 为奇函数，又 $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)>0$.

7.【解析】由程序框图可知，落在正方形内的 1000 个点，其中落在圆内有 n（如图），所以 $\dfrac{\pi}{4}\approx\dfrac{n}{1000}$，故 $\pi\approx 0.004n$，因此选 D。

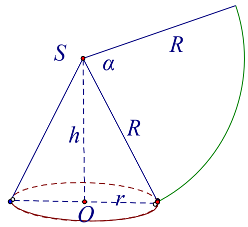


8. 【解析】设 $A\left(x_0,y_0\right),B\left(-x_0,y_0\right)$，则 $y_0^2=b^2\left(\dfrac{x_0^2}{a^2}-1\right)$. 又 $P\left(a,0\right)$，$\overrightarrow{PA}=\left(x_0-a,y_0\right),\overrightarrow{PB}=\left(-x_0-a,y_0\right)$，由已知 $PA\perp PB$,则 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=-x_0^2+a^2+y_0^2=0$，即 $\left(a^2-b^2\right)\left(\dfrac{x_0^2}{a^2}-1\right)=0$，对于 $x_0\geq a$ 或 $x_0\leq -a$ 恒成立，故 $a^2=b^2$，即 $a=b$，所以 $e=\sqrt{1+\dfrac{b^2}{a^2}}=\sqrt{2}$.故选 A

9.【解析】设圆锥底面半径为 r，高为 h，则 $r^2+h^2=R^2$，圆锥的体积为

$V=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi\left(R^2-h^2\right)h=\frac{1}{3}\pi\left(R^2h-h^3\right)$，$V'=\frac{1}{3}\pi\left(R^2-3h^2\right)=0$，得 $h^2=\frac{1}{3}R^2$，此时

圆锥体积最大.故 $r=\frac{\sqrt{6}}{3}R$，由 $\alpha=\frac{2\pi r}{R}=\frac{2\sqrt{6}}{3}\pi$，故选 D。



10.【解析】由已知得 $a_{n+1}=a_n+n+1$，可得 $a_n=\frac{n\left(n+1\right)}{2}$，

故 $S_n=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}=2\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{2n}{n+1}$。

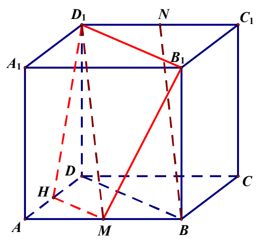
由已知得 $\frac{2n}{n+1}\geq\frac{7}{4}$，解得 $n\geq 7$，故选 B。

11.【解析】因为 $f\left(0\right)=2,f\left(\pi\right)=-2,f\left(0\right)\neq f\left(\pi\right)$，故 A，D 错误；

因为 $f\left(2\pi\right)=f\left(0\right)=2,f\left(2\pi\right)+f\left(0\right)\neq 0$，故 C 错误。

$f'\left(x\right)=-2\sin x-2\cos 2x=4\sin^2 x-2\sin x-2=2\left(2\sin x+1\right)(\sin x-1)$

当 $\sin x=-\frac{1}{2}$，$\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 时，$f\left(x\right)_{\max}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$，故选 B.



12.【解析】取 AD 的中点 H，连接 HM,HD_1,B_1D_1,MD_1,BN，可得

$BN//MD_1$，则 $BN//$平面HMB_1D_1，故平面 α 即平面 HMB_1D_1。

故截面 HMB_1D_1 为等腰梯形，可得 $B_1D_1=\sqrt{2},MH=\frac{\sqrt{2}}{2},MB_1=HD_1=\frac{\sqrt{5}}{2}$，

高为 $\sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2}=\frac{3\sqrt{2}}{4}$，其面积 $S=\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\sqrt{2}\right)\times\frac{3\sqrt{2}}{4}=\frac{9}{8}$.

另几何体 $AHM-A_1B_1D_1$ 为棱台，上底面积 $S_{\Delta AMH}=\frac{1}{8}$，下底面积 $S_{\Delta A_1B_1D_1}=\frac{1}{2}$，高 $AA_1=1$，

故体积 $V_1=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\right)\times 1=\frac{7}{24}$，另一部分体积 $V_2=1-\frac{7}{24}=\frac{17}{24}$，$V_1:V_2=7:17$，故选 D。

13.【答案】$y=x+1$【解析】$y'=1-\sin x$，$y'|_{x=0}=1$。又曲线过点 $\left(0,1\right)$，故切线方程为 $y=x+1$。

14.【答案】$\dfrac{\pi}{3}$【解析】由$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}|$得：$\boldsymbol{a}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2=\boldsymbol{a}^2-4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+4\boldsymbol{b}^2$，又$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=1$，所以$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\dfrac{1}{2}$，即$\cos\theta=\dfrac{1}{2}$， 所以$\theta=\dfrac{\pi}{3}$。

15.【答案】352【解析】由已知$c_1=b_2=a_2=4$，设$c_n=b_m=a_t$，即$c_n=2^m=3t-2$，$b_{m+1}=2^{m+1}=2(3n-2)=3n-4$ 所以 b_m 不是公共项。$b_{m+2}=2^{m+2}=4(3t-2)=3(4t-2)-2=a_{4t-2}$，故 $c_{n+1}=b_{m+2}=a_{4t-2}$，故当 $n=5$ 时，$m=10$，此时$c_5=2^{10}=3t-2$，$t=342$，故$m+t=352$。

16.【答案】1 或 3【解析】由已知得圆心(a,b)在抛物线上，$a=4-\dfrac{p}{2}$，$b^2=2p\left(4-\dfrac{p}{2}\right)=8p-p^2$，因为$|AB|=4$，所以$b^2+4=4^2$，故$b^2=12$.所以$8p-p^2=12$，即$p^2-8p+12=0$，所以$p=2$ 或$p=6$，故$a=3$ 或$a=1$.

17. 【解析】（Ⅰ）由正弦定理及$5a-3c=5b\cos C$，

得$5\sin A-3\sin C=5\sin B\cos C$ ……………………………………………………2 分

又$A=\pi-(B+C)$，$\sin A=\sin(B+C)=\sin B\cos C+\cos B\sin C$，

代入上式得$5\cos B\sin C-3\sin C=0$，又$\sin C>0$，故$\cos B=\dfrac{3}{5}$。…………4 分

所以$\sin B=\dfrac{4}{5}$.又$C=\pi-(A+B)$，

$$\cos C=-\cos(A+B)=-[\cos A\cos B-\sin A\sin B]=\frac{\sqrt{2}}{10}$$ ……………………6 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）知$\sin B=\dfrac{4}{5}$，可求$\sin C=\sqrt{1-\cos^2 C}=\dfrac{7\sqrt{2}}{10}$

由正弦定理得$a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C=5\sqrt{2}:8:7\sqrt{2}$ ……………………8 分

设$a=5\sqrt{2}x,b=8x,c=7\sqrt{2}x$，在$\Delta ABD$中，$BD^2=c^2+\dfrac{1}{4}b^2-bc\cos A$，

即$29=98x^2+16x^2-56\sqrt{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，化简得$x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ …………………………11 分

所以$a=5,b=4\sqrt{2},c=7$，周长为$l=a+b+c=12+4\sqrt{2}$ ………………12 分

注：第一问求$\cos B$也可以用余弦定理。

18.【解析】（1）因为侧面 $PAB\perp$ 底面 ABC， $AB\perp BC$

故 $BC\perp$ 侧面 PAB，又 $PA\subset$ 侧面 PAB，

所以 $PA\perp BC$. ……………………………………………………2 分

又 $PA\perp PB$，故 $PA\perp$ 平面PBC。

因为 $PC\subset$ 平面PBC，所以 $PA\perp AC$，故 ΔPAC 是直角三角形。………………5 分

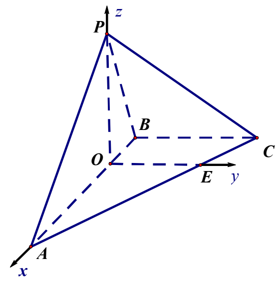
（2）过 P 作 $PO\perp AB$ 垂足为 O，过 O 作 $OE//BC$，故 $OE\perp AB$

由侧面 $PAB\perp$ 底面 ABC，得 $PO\perp$ 侧面 PAB。

以 OA,OE,OP 所在直线分别为 x,y,z 轴建立空间直角坐标系。

设 $AB=2PB=2BC=2$，在 $Rt\Delta PAB$ 中可得 $OP=\dfrac{\sqrt{3}}{2},OA=\dfrac{3}{2},OB=\dfrac{1}{2}$ ，

故 $A\left(\dfrac{3}{2},0,0\right),B\left(-\dfrac{1}{2},0,0\right),C\left(-\dfrac{1}{2},1,0\right),P\left(0,0,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ………8 分



$\overrightarrow{PA}=\left(\dfrac{3}{2},0,-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right),\overrightarrow{CA}=(2,-1,0)$

设平面 PAC 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，则 $\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{PA}=0,\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{CA}=0$.

所以 $\begin{cases}\dfrac{3}{2}x-\dfrac{\sqrt{3}}{2}y=0\\ 2x-y=0\end{cases}$，取 $x=1,y=2,z=\sqrt{3}$，故 $\boldsymbol{m}=(1,2,\sqrt{3})$ …10 分

又平面 ABC 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(0,0,1)$， $\cos\langle\boldsymbol{m},n\rangle=\dfrac{\boldsymbol{m}\cdot n}{|\boldsymbol{m}||n|}=\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$.

二面角 $P-AC-B$ 余弦值为 $\dfrac{\sqrt{6}}{4}$。 ……………………………………………………12 分

19.【解析】（1）甲生产线零件内径落在

$[25.30,25.34),[25.34,25.38),[25.38,25.42),[25.42,25.46),[25.46,25.50]$ 的频率分别为：$0.10,0.10,0.35,0.25,0.20$.

所以内径尺寸均值为：

$\overline{x}_1=25.32\times0.10+25.36\times0.10+25.40\times0.35+25.44\times0.25+25.48\times0.20=25.414$

……………………………………………………2 分

乙生产线零件内径落在

$[25.30,25.34),[25.34,25.38),[25.38,25.42),[25.42,25.46),[25.46,25.50]$ 的频率分别为：$0.10,0.20,0.30,0.30,0.10$.所以内径尺寸均值为：

$\overline{x}_2 = 25.32\times0.10+25.36\times0.20+25.40\times0.30+25.44\times0.30+25.48\times0.10=25.404$

从上面均值说明乙生产线生产的零件的精度更高一些. ……………………………4 分

（2）（i）甲生产线零件分别为一等品、二等品和三等品的概率分布如下：

甲生产零件等级	一等品	二等品	三等品
概率 P	0.35	0.45	0.20

乙生产线零件分别为一等品、二等品和三等品的概率分布如下：

乙生产零件等级	一等品	二等品	三等品
概率 P	0.30	0.40	0.30

……………………………………………………………………………………………6 分

生产线上零件精度等级高于乙生产线上零件等级的概率为：

$P=0.45\times0.30+0.35\times\left(0.40+0.30\right)=0.38$ ……………………………………8 分

（ii）甲生产一个零件的利润分布列为：

甲生产一个零件利润 Y_1（单位：元）	200	100	50
概率 P	0.35	0.45	0.20

利润均值为：$EY_1=200\times0.35+100\times0.45+50\times0.20=125$（元）

乙生产一个零件的利润分布列为：

乙生产一个零件利润 Y_2（单位：元）	200	100	50
概率 P	0.30	0.40	0.30

利润均值为：$EY_2=200\times0.30+100\times0.40+50\times0.30=115$（元） ………………10 分

当 $n=5000$ 时，工厂利润为：$5000\times125+5000\times115=1200000$（元）；

当 $n=6000$ 时，工厂利润为：$6000\times125+4000\times115=1210000$（元）.

因为$1210000>1200000$，故当 $n=6000$ 时工厂利润最大. ……………………12 分

20.【解析】（1）设点 P 的坐标为$\left(x,y\right)$ ，

直线 PA 与 PB 的斜率分别为 $k_{PA}=\dfrac{y}{x+2},k_{PB}=\dfrac{y}{x-2}$ ，$x\neq\pm2$ ……………2 分

由已知得：$\dfrac{y}{x+2}\cdot\dfrac{y}{x-2}=-\dfrac{3}{4}$，化简得$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$

由已知得 $x\neq\pm2$，故曲线 C 的方程为：$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1\left(x\neq\pm2\right)$。 ………………4 分

（2）设直线 AP 与 BQ 交点为 $M\left(4,m\right)$， 则直线 AP 的方程为： $y=\dfrac{m}{6}\left(x+2\right)$

由 $\begin{cases} y=\dfrac{m}{6}\left(x+2\right) \\ 3x^2+4y^2=12 \end{cases}$ 得：$\left(m^2+27\right)x^2+4m^2x+4m^2-108=0$

设 $P\left(x_P,y_P\right)$ ，则 $-2x_P=\dfrac{4m^2-108}{m^2+27}$ ，即 $x_P=\dfrac{54-2m^2}{m^2+27}$， ························6 分

$y_P=\dfrac{m}{6}\left(x_P+2\right)=\dfrac{18m}{m^2+27}$

同理，BQ 的方程为：$y=\dfrac{m}{2}\left(x-2\right)$ 与椭圆方程联立，消去 y 整理得：

$\left(m^2+3\right)x^2-4m^2x+4m^2-12=0$， 设 $Q\left(x_Q,y_Q\right)$ ，则 $2x_Q=\dfrac{4m^2-12}{m^2+3}$ ，

即 $x_Q=\dfrac{2m^2-6}{m^2+3}$，$y_Q=\dfrac{m}{2}\left(x_Q-2\right)=\dfrac{-6m}{m^2+3}$ ································8 分

当 $m\neq\pm3$ 时，直线 PQ 的斜率为：$k_{PQ}=\dfrac{y_P-y_Q}{x_P-x_Q}=-\dfrac{6m}{m^2-9}$ ，

此时直线 PQ 的方程为：$y+\dfrac{6m}{m^2+3}=-\dfrac{6m}{m^2-9}\left(x-\dfrac{2m^2-6}{m^2+3}\right)$

化简得：$y=-\dfrac{6m}{m^2-9}\left(x-1\right)$，故直线 PQ 过定点 $\left(1,0\right)$ 。 ························10 分

当 $m=\pm3$ 时，可得 $x_P=x_Q=1$ ，所以直线 PQ 也过定点 $\left(1,0\right)$。

综合上述：直线 PQ 过定点 $\left(1,0\right)$。 ······································12 分

21.【解析】（1）$f\left(x\right)$ 的定义域为 $\left(0,+\infty\right)$，$f'\left(x\right)=m+\dfrac{1}{x}=\dfrac{mx+1}{x}$ ··············2 分

当 $m\geq0$ 时，$f'\left(x\right)>0$，$f\left(x\right)$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 上单调递增； ·····························3 分

当 $m<0$ 时，由 $f'\left(x\right)=0$ 得 $x=-\dfrac{1}{m}$。

若 $x\in\left(0,-\dfrac{1}{m}\right)$，$f'\left(x\right)>0$，$f\left(x\right)$ 单调递增；

若 $x\in\left(-\dfrac{1}{m},+\infty\right)$，$f'\left(x\right)<0$，$f\left(x\right)$ 单调递减

综上：当$m\geq 0$时，$f\left(x\right)$在$\left(0,+\infty\right)$上单调递增；

当$m<0$时，$f\left(x\right)$在$\left(0,-\dfrac{1}{m}\right)$单调递增，在$\left(-\dfrac{1}{m},+\infty\right)$单调递减。 ……………5 分

（2）$f\left(x\right)\leq xe^{x}-1$等价于$a\leq\dfrac{xe^{x}-1-\ln x}{x}$ 在区间$\left(0,+\infty\right)$内恒成立。

令$g\left(x\right)=\dfrac{xe^{x}-1-\ln x}{x}$ ， ……………………………………………6 分

令$h\left(x\right)=e^{x}-x-1$，则 $h'\left(x\right)=e^{x}-1$。

当$x\in\left(-\infty,0\right)$ 时，$h'\left(x\right)<0$ ，$h\left(x\right)$ 单调递减；

当$x\in\left(0,+\infty\right)$ 时，$h'\left(x\right)>0$ ，$h\left(x\right)$ 单调递增；

所以$h\left(x\right)\geq h\left(0\right)=0$ ，即$e^{x}\geq x+1$ 。 ……………………8 分

又$xe^{x}=e^{\ln x+x}$ ，所以$xe^{x}\geq\ln x+x+1$。

所以$g\left(x\right)=\dfrac{xe^{x}-1-\ln x}{x}\geq\dfrac{\ln x+x+1-1-\ln x}{x}=1$ ……………………10 分

当$\varphi\left(x\right)=\ln x+x=0$ 时等号成立。

因为$\varphi\left(x\right)$ 在区间$\left(0,+\infty\right)$ 内单调递增，$\varphi\left(\dfrac{1}{e}\right)<0,\varphi\left(1\right)>0$ ，

所以存在$x_{0}\in\left(\dfrac{1}{e},1\right)$ ，使得$\varphi\left(x_{0}\right)=0$ 成立， ………………………11 分

所以$m\leq 1$，即实数m的取值范围为$\left(-\infty,1\right]$。 ………………………12 分

22.【解析】（1）由$\rho^{2}\left(1+3\sin^{2}\theta\right)=4$，得：$\rho^{2}+3\rho^{2}\sin^{2}\theta=4$.

将$\rho^{2}=x^{2}+y^{2},\rho\sin\theta=y$代入得 $x^{2}+y^{2}+3y^{2}=4$ ， ……………………2 分

所以曲线C的直角坐标方程为$\dfrac{x^{2}}{4}+y^{2}=1$. ………………………………4 分

（2）设l的参数方程为：$\begin{cases}x=1+t\cos\alpha\\ y=t\sin\alpha\end{cases}$ （t为参数），代入椭圆方程整理得：

$\left(\cos^2\alpha+4\sin^2\alpha\right)t^2+2\cos\alpha\cdot t-3=0$. ……………………………6 分

设方程的两根分别为t_1,t_2，则$t_1t_2=-\dfrac{3}{\cos^2\alpha+4\sin^2\alpha}$

因为$t_1t_2<0$，故$|PA||PB|=\left|t_1t_2\right|=\dfrac{12}{13}$

所以$\dfrac{3}{\cos^2\alpha+4\sin^2\alpha}=\dfrac{12}{13}$ ……………………………………………8 分

解得，所以$\sin\alpha=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ，即$\alpha=\dfrac{\pi}{3}$ 或$\alpha=\dfrac{2\pi}{3}$.

故l的参数方程为$\begin{cases}x=1+\dfrac{1}{2}t\\y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\end{cases}$ 或$\begin{cases}x=1-\dfrac{1}{2}t\\y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\end{cases}$ （t是参数）.………………………10 分

23.【解析】（1）$\left|x-1\right|+\left|x-2\right|=\begin{cases}3-2x,x<1\\1,1\le x\le 2\\2x-3,x>2\end{cases}$ ……………………………………2 分

原不等式等价于：$\begin{cases}x<1\\3-2x<3\end{cases}$ ①或$\begin{cases}1\le x\le 2\\1<3\end{cases}$ ②或$\begin{cases}x>2\\2x-3<3\end{cases}$ ③

解①得：$0<x<1$ ；解②得：$1\le x\le 2$ ；解③得：$2<x<3$.

所以原不等式的解集为：$M=\left\{x\middle|0<x<3\right\}$. ……………………………4 分

（2）因为$a,b,c\in\left(0,3\right)$，且$a+b+c=3$，

所以$\dfrac{a+b+c}{3}\ge\sqrt[3]{abc}$ ，故$\sqrt[3]{abc}\le 1$，故$0<abc\le 1$

$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\ge\dfrac{3}{\sqrt[3]{abc}}\ge 3$ ……………………………………………………7 分

因为$a^2+b^2\ge 2ab$ ，$b^2+c^2\ge 2bc$，$c^2+a^2\ge 2ac$

所以$a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ca$，故$\dfrac{a^2+b^2+c^2}{abc}\ge\dfrac{ab+bc+ca}{abc}$

所以 $\dfrac{a}{bc}+\dfrac{b}{ac}+\dfrac{c}{ab}\ge\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}$ ……………………………………10 分